ÜBER AXIOMENSYSTEME DIE EINE ABSTRAKTE GRUPPE BESTIMMEN

VON

BENGT STOLT

Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB

UPPSALA 1953

ÜBER AXIOMENSYSTEME DIE EINE ABSTRAKTE GRUPPE BESTIMMEN

Inaugural-Dissertation

VON

BENGT STOLT
FIL. LIC., ÖSTG.

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
MIT GENEHMIGUNG DER WEITBERÜHMTEN
PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU UPPSALA
ZUR ÖFFENTLICHEN BEURTEILUNG VORGELEGT.
DIE VERTEIDIGUNG WIRD AM 25. APRIL 1953
UM 10 UHR VORMITTAGS IM HÖRSAAL
DES MATHEMATISCHEN SEMINARS
STATTFINDEN.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

ÜBER AXIOMENSYSTEME DIE EINE ABSTRAKTE GRUPPE BESTIMMEN

VON

BENGT STOLT

Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB

UPPSALA 1953

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Vorwort.

Der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung wurde mir von meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Trygve Nagell, Uppsala, vorgeschlagen. Es ist mir eine liebe Pflicht, ihm meinen Dank für die wertvolle Unterstützung und Ermutigung auszusprechen, die er mir während der Arbeit mit dieser Abhandlung hat zuteil werden lassen.

Ebenfalls möchte ich Fräulein Birgit Paul, die die Revision meines deutschen Manuskripts vorgenommen hat, herzlich danken.

Uppsala, im Februar 1953.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNIS

Abschnitt I. Einleitung. Definitionen ... 7

1. Einleitung ... 7
2. Die klassischen Definitionen einer Gruppe ... 7
3. Über die Reduzibilität der in den klassischen Definitionen enthaltenen Postulate. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ... 8
4. Aufstellung der verschiedenen Axiome ... 11
5. Die Produkttafel ... 15
6. Das assoziative Gesetz. Die Aufstellung des Schemas ... 17
7. Notwendige Bedingungen einer Gruppendefinition ... 19

Abschnitt II. Definitionen, die das Axiom U enthalten ... 21

8. Einleitung ... 21
9. Hilfssätze ... 21
10. Definitionen ... 25

Abschnitt III. Definitionen, die das Axiom U nicht enthalten ... 35

11. Einleitung ... 35
12. Hilfssätze ... 35
13. Definitionen ... 37

Abschnitt IV. Die Irreduzibilität der Definitionen ... 50

14. Einleitung ... 50
15. Sätze ... 50
16. Unentschiedene Systeme. Die Irreduzibilität der Definitionen ... 53
17. Systeme, die spezielle Inversaxiome und Eins-Unitätsaxiome nicht enthalten ... 55

Abschnitt V. Definitionen, die das Axiom UA enthalten ... 57

18. Einleitung ... 57
19. Aufstellung des Axioms *UA* ... 57
20. Hilfssätze ... 58
21. Definitionen ... 63

Abschnitt VI. Definitionen, die das Axiom EA_H enthalten ... 70

22. Einleitung ... 70
23. Aufstellung der Axiome EA_L, EA_H und EA_{St} ... 70
24. Hilfssätze ... 72
25. Definitionen ... 74
26. Die Irreduzibilität der Definitionen ... 75
27. Definitionen, die EA_{St} statt EA_H enthalten ... 76

Abschnitt VII. Definitionen, die das Axiom EA_{St} aber nicht das Axiom U enthalten ... 78

28. Einleitung ... 78
29. Hilfssätze ... 78
30. Definitionen ... 80
31. Die Irreduzibilität der Definitionen ... 86

Abschnitt VIII. Definitionen, die das Axiom EA_L enthalten ... 88

32. Einleitung ... 88
33. Hilfssätze ... 88
34. Definitionen ... 90
35. Die Irreduzibilität der Definitionen ... 97

Literaturverzeichnis ... 98

ABSCHNITT I

Einleitung. Definitionen.

1. *Einleitung.*

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Voraussetzungen zu untersuchen, die eine nichtleere Menge erfüllen muss, um eine Gruppe zu sein.

Unter den im Texte zitierten Untersuchungen, die dieses Problem behandeln, wollen wir zwei Arbeiten hervorheben, nämlich

R. Baer–F. Levi: Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxiomen. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Math.-naturwissenschaftliche Klasse, 2. Abhandlung 1932, S. 3–12.

P. Lorenzen, Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik, Math. Zeitschrift 49 *(1943–44), S. 313–27.*

Wenn wir diese Arbeiten zitieren, werden wir nur die Namen der Verfasser angeben.

Unser Ausgangspunkt in diesem Abschnitt sind die gewöhnlichen Definitionen einer Gruppe, die man in den Lehrbüchern findet. Es wird zunächst gezeigt, wie die in diese Definitionen eingehenden Postulate in weniger umfassende Voraussetzungen zerlegt werden können. Danach präzisieren wir diejenigen Voraussetzungen, von denen wir in dieser Arbeit ausgehen wollen. Es ist auch notwendig, die Formulierung des assoziativen Gesetzes etwas näher zu betrachten. Es ergibt sich, dass unter den Bedingungen gewisse drei notwendig erfüllt sein müssen, wenn ein System von Voraussetzungen eine Gruppe definieren soll.

2. *Die klassischen Definitionen einer Gruppe.*

Wir betrachten eine nichtleere Menge, die aus mathematischen Objekten besteht. Diese Objekte, die wir die *Elemente* der Menge nennen, bezeichnen wir mit den Symbolen a, b, c usw. Die Anzahl der Elemente kann endlich oder unendlich sein. In einigen Fällen, hauptsächlich wenn wir eine endliche Menge betrachten, die wenige Elemente enthält, werden wir die Elemente der Menge numerieren und die Elemente mit den entsprechenden Nummern 1, 2, . . . usw. bezeichnen.

Eine nichtleere Menge wird bekanntlich eine *Gruppe* genannt, wenn die folgenden vier Postulate erfüllt sind.[1]

[1] Siehe z. B. T. Nagell, Lärobok i algebra, S. 43, oder Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, S. 10.

1) Es ist eine *Zusammensetzungsvorschrift* gegeben, so dass jedem geordneten Paar von gleichen oder verschiedenen Elementen der Menge eindeutig ein Element der Menge zugeordnet ist. Dieses Element nennen wir das *Produkt* der beiden Elemente. Die Formel dieser *Komposition* ist $a\ b = c$, und wir werden sie eine *Gleichung* nennen.

2) Für drei beliebige Elemente a, b und c der Menge gilt die Beziehung $(a\ b)c = a(b\ c)$. Wenn dies der Fall ist, besteht für die Produktbildung der Menge das *assoziative Gesetz.*

3) Wenn a und c zwei Elemente der Menge sind, gibt es genau ein Element b der Menge, das die Gleichung $a\ b = c$ erfüllt.

4) Wenn b und c zwei Elemente der Menge sind, gibt es genau ein Element a der Menge, das die Gleichung $a\ b = c$ erfüllt.

In der Definition einer Gruppe können die Postulate 3. und 4. von den folgenden Postulaten ersetzt werden.

3′) In der Menge gibt es ein Element e, das für jedes Element a der Menge die Gleichungen $a\ e = e\ a = a$ erfüllt. Das Element e werden wir das *Einselement* der Gruppe nennen.

4′) Zu jedem beliebigen Elemente a der Menge gibt es genau ein Element a', das die Gleichungen $a'\ a = a\ a' = e$ erfüllt. Das Element a' nennen wir das *inverse Element von a.*

Die beiden Gruppendefinitionen, die aus den Postulaten 1., 2., 3. und 4. oder 1., 2., 3′. und 4′. bestehen, werden wir als *die klassischen Definitionen einer Gruppe* bezeichnen.

3. *Über die Reduzibilität der in den klassischen Definitionen enthaltenen Postulate. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.*

In den klassischen Definitionen einer Gruppe ist es nicht möglich, eines der vier Postulate wegzulassen. Dagegen enthalten die Postulate gewisse Bedingungen, die in mehr als einem Postulat enthalten sind oder von den übrigen Postulaten der Definition hergeleitet werden können. Es ist nun das Ziel der vorliegenden Arbeit, Systeme irreduzibler Voraussetzungen zu untersuchen. Darum werden wir die Postulate der klassischen Definitionen in weniger umfassende Voraussetzungen zerlegen. Diese Voraussetzungen werden wir *Gruppenaxiome* oder kurz *Axiome* nennen.

Zunächst werden wir das Postulat 1. betrachten. Es enthält sowohl eine Aussage über die Existenz des Produktes c als eine Aussage über

die Eindeutigkeit des Produktes c. Dann leuchtet unmittelbar ein, dass wir dieses Postulat in zwei Axiome zerlegen können, ein Axiom, das die Existenz des Produktes fordert, und ein Axiom, das die Eindeutigkeit des Produktes fordert.

Es ist klar, dass wir auch die Postulate 3. und 4. in zwei Axiome zerlegen können. Dann erhalten wir ein Axiom, das fordert, dass ein drittes Element existieren muss, und ein Axiom, das fordert, dass höchstens ein drittes Element existieren kann.

Ein Axiom, das von zwei Elementen ausgeht und die Existenz eines dritten Elementes fordert, werden wir im Folgenden ein *Existenzaxiom* nennen, und ein Axiom, das von zwei Elementen ausgeht und die Eindeutigkeit des etwaigen dritten Elementes fordert, werden wir ein *Unitätsaxiom* nennen.

Wenn man, von zwei Elementen a und b der Menge ausgehend, ein drittes Element c als Produkt der beiden Elemente bestimmen kann, aber die Eindeutigkeit dieser Komposition nicht vorausgesetzt ist, werden wir die Komposition in der Formel $a\ b \supset c$ schreiben. Diese Formel werden wir eine *Verknüpfung* nennen. Wenn die Komposition eindeutig ist, geht die Verknüpfung in die oben definierte Gleichung über. In denjenigen Fällen, wo die Komposition nicht eindeutig ist, kann es bisweilen zweckmässig sein, sämtliche Elemente der Produkte auszuschreiben. In diesen Fällen werden wir die Komposition

$$a\ b = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

oder kürzer $a\ b = (c_1, \ldots)$ schreiben. Auch diese Formeln werden wir *Gleichungen* nennen.

Diejenigen Existenzaxiome und Unitätsaxiome, die aus den Postulaten 1., 3. und 4. hergeleitet werden können, wollen wir die *allgemeinen Axiome* nennen.

Wir werden nun das Postulat 3′. betrachten. Es besteht aus zwei Gleichungen, $e\ a = a$ und $a\ e = a$. Dann können wir voraussetzen, dass nur eine dieser Gleichungen besteht. Wenn nur die Gleichung $e\ a = a$ besteht, werden wir das Element e ein *linksseitiges Einselement* nennen, und wenn nur die Gleichung $a\ e = a$ besteht, werden wir das Element e ein *rechtsseitiges Einselement* nennen.

Im Postulat 3′. wird vorausgesetzt, dass das Element a ein beliebiges Element der Menge ist. Wenn wir diese Bedingung weglassen, können wir 3′. in andere Voraussetzungen zerlegen. Wir können z. B. annehmen,

dass die Gleichung $e\,a = a$ für mindestens ein spezielles Element $a = c$ der Menge besteht, und wir können sogar annehmen, dass $a = e$ sein muss. In allen diesen Fällen werden wir das Element e als *Einselement* bezeichnen. Wenn die Verknüpfung $e\,e \supset e$ besteht, wird das Element e als ein *idempotentes Element* bezeichnet.

Die oben definierten Bezeichnungen *Einselement*, *rechtsseitiges* und *linksseitiges Einselement* werden wir auch benutzen, wenn die eindeutige Komposition nicht vorausgesetzt ist und wenn also die obigen Gleichungen in Verknüpfungen übergehen.

Alle obigen Axiome werden wir *Eins-Existenzaxiome* nennen, weil sie die Existenz eines Einselements voraussetzen. Wir können auch Axiome einführen, die fordern, dass es in der Menge höchstens ein Einselement von einem gewissen Typus gibt. Ein solches Axiom werden wir ein *Eins-Unitätsaxiom* nennen.

Wir werden nun das Postulat 4′. betrachten. Zuerst leuchtet ein, dass es aus den zwei Gleichungen $a'\,a = e$ und $a\,a' = e$ besteht. Wenn die Verknüpfung $a'\,a \supset e$ besteht, werden wir das Element a' ein *linksseitiges Inverses* nennen, und wenn die Verknüpfung $a\,a' \supset e$ besteht, werden wir es ein *rechtsseitiges Inverses* nennen.

Es ist klar, dass die Verknüpfungen $a'\,a \supset e$ und $a\,a' \supset e$ sowohl die Existenz des Elementes a' als die Eindeutigkeit dieses Elements fordern. Darum können wir jede von diesen Verknüpfungen in ein Existenzaxiom und ein Unitätsaxiom zerlegen.

Im Postulat 4′. wird vorausgesetzt, dass ein beliebiges Element a das Postulat erfüllt. Wir können natürlich annehmen, dass mindestens das Element c das Postulat erfüllt.

Ein Axiom, das aus dem Postulat 4′. hergeleitet ist, werden wir ein *Inversaxiom* nennen. Wenn das Axiom für jedes Element a der Menge besteht, werden wir es ein *allgemeines Inversaxiom* nennen. Wenn es nur für mindestens ein Element c besteht, werden wir es ein *spezielles Inversaxiom* nennen.

Um ein Element der Menge zu bezeichnen, werden wir in der ganzen Arbeit die folgenden Bezeichnungen verwenden.

Mit a und b bezeichnen wir willkürliche Elemente der Menge, und zusammen mit a und b wird auch c als Symbol eines willkürlichen Elementes verwendet. Gewöhnlich werden wir mit c ein Element der Menge bezeichnen, zu welchem wir ein Einselement e bestimmen können, das eine der Verknüpfungen $e\,c \supset c$ oder $c\,e \supset c$ erfüllt. Mit d werden wir ein

spezielles Element der Menge bezeichnen. Das inverse Element von a wird mit a' bezeichnet, das inverse Element von c wird mit c' bezeichnet, usw. Mit f' bezeichnen wir ein Element, das eine der Verknüpfungen $f' a \supset d$ oder $a f' \supset d$ erfüllt, mit h' ein Element, das eine der Verknüpfungen $h' c \supset d$ oder $c h' \supset d$ erfüllt.

Wenn wir, von zwei Elementen einer Menge ausgehend, mindestens ein drittes Element bestimmen können, das eine gewisse Verknüpfung erfüllt, werden wir dieses Element mit einer Ziffer numerieren. $a b_1 \supset c$ bedeutet also, dass auch Elemente b_2, b_3, ... existieren können, die in dieser Verknüpfung das Element b_1 ersetzen können. Wenn es höchstens ein drittes Element geben kann, wird kein Index benutzt.

4. *Aufstellung der verschiedenen Axiome.*

Wir werden nun diejenigen Axiome aufstellen, die wir in dieser Arbeit benutzen wollen. Die allgemeinen Axiome, die Eins-Existenzaxiome und die allgemeinen Inversaxiome sind von früheren Verfassern aufgestellt worden.

Zugrunde der ganzen Arbeit liegt eine nichtleere Menge, in welcher eine dreistellige Relation $a b \supset c$ definiert ist. Unser Ziel ist zu zeigen, dass wenn man für diese Menge annimmt, dass gewisse Axiome bestehen, es Fälle gibt, wo man aus diesen Axiomen alle übrigen Axiome, die für eine Gruppe bestehen, herleiten kann. Dann ist es klar, dass wir von der Menge keine negativen Voraussetzungen annehmen dürfen. Wenn wir annehmen, dass es eine Menge gibt, für welche gewisse Axiome bestehen, ist es also möglich, dass auch andere Axiome bestehen können. Unser Ziel ist zu zeigen, ob andere Axiome notwendig bestehen müssen oder ob es Mengen gibt, in welchen alle übrigen Axiome nicht bestehen.

Die allgemeinen Axiome.

Wir werden nun die allgemeinen Axiome aufstellen. Sie sind zum erstenmal von Baer und Levi[1] eingeführt worden. Die Symbole, womit wir diese Axiome bezeichnen wollen, sind von Lorenzen[2] benutzt worden.

Die allgemeinen Existenzaxiome.

E: Zu je zwei Elementen a und b der Menge gibt es *mindestens* ein Element c_1 der Menge, das die Verknüpfung $a b \supset c_1$ erfüllt.

[1] S. 4.

[2] S. 315–316.

lE: Zu je zwei Elementen b und c der Menge gibt es *mindestens* ein Element a_1 der Menge, das die Verknüpfung $a_1 b \supset c$ erfüllt.

rE: Zu je zwei Elementen a und c der Menge gibt es *mindestens* ein Element b_1 der Menge, das die Verknüpfung $a b_1 \supset c$ erfüllt.

Die allgemeinen Unitätsaxiome.

U: Zu je zwei Elementen a und b der Menge gibt es *höchstens* ein Element c der Menge, das die Gleichung $a b = c$ erfüllt.

lU: Zu je zwei Elementen b und c der Menge gibt es *höchstens* ein Element a der Menge, das die Verknüpfung $a b \supset c$ erfüllt.

rU: Zu je zwei Elementen a und c der Menge gibt es *höchstens* ein Element b der Menge, das die Verknüpfung $a b \supset c$ erfüllt.

Die Eins-Existenzaxiome.

Wir werden nun die Eins-Existenzaxiome aufstellen, und wir verwenden diejenigen Symbole, die von Lorenzen[1] benutzt werden. Doch fügen wir die Bezeichnung (E) hinzu, um diese Axiome von den später definierten Eins-Unitätsaxiomen zu trennen.

e: In der Menge gibt es *mindestens* ein Element e, und wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, erfüllt das Element e die Verknüpfungen $e a \supset a$ und $a e \supset a$.

lI(E): In der Menge gibt es *mindestens* ein Element e, und wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, erfüllt das Element e die Verknüpfung $e a \supset a$.

rI(E): In der Menge gibt es *mindestens* ein Element e, und wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, erfüllt das Element e die Verknüpfung $a e \supset a$.

I(E): In der Menge gibt es *mindestens* ein Element e, das die Verknüpfung $e\ e \supset e$ erfüllt.

li(E): In der Menge gibt es *mindestens* ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das die Verknüpfung $e c \supset c$ erfüllt.

ri(E): In der Menge gibt es *mindestens* ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das die Verknüpfung $c e \supset c$ erfüllt.

Es ist zweckmässig, auch das folgende ‚Axiom' einzuführen.

i: In der Menge gibt es *mindestens* ein Element d.[2]

[1] S. 317.

[2] Lorenzen, S. 316.

In den Fällen, wo kein Missverständnis zu befürchten ist, wollen wir die Symbole ohne (E) schreiben, z. B. lI statt $lI(E)$. So werden wir immer schreiben, wenn das Eins-Existenzaxiom in der Bezeichnung eines Inversaxioms enthalten ist.

Mit J oder $J(E)$ werden wir eines der Axiome e, lI, rI, I, li, ri oder i bezeichnen.[1]

Wenn es in der Menge ein Element e gibt, das das Eins-Existenzaxiom J erfüllt, werden wir sagen, dass das Element e die *Eigenschaft* J hat.

Die Eins-Unitätsaxiome.

Wir werden auch Eins-Unitätsaxiome einführen, und wir definieren sie folgendermassen.

lI(U): In der Menge gibt es *höchstens* ein Element e, das für jedes Element a der Menge die Verknüpfung $e\,a \supset a$ erfüllt.

rI(U): In der Menge gibt es *höchstens* ein Element e, das für jedes Element a der Menge die Verknüpfung $a\,e \supset a$ erfüllt.

I(U): In der Menge gibt es *höchstens* ein Element e, das die Verknüpfung $e\,e \supset e$ erfüllt.

li(U): Zu jedem Element c der Menge gibt es *höchstens* ein Element e_c, das die Verknüpfung $e_c\ c \supset c$ erfüllt.

ri(U): Zu jedem Element c der Menge gibt es *höchstens* ein Element e_c, das die Verknüpfung $c\,e_c \supset c$ erfüllt.

Die allgemeinen Inversaxiome.

Wir werden nun die allgemeinen Inversaxiome aufstellen. Sie sind von Lorenzen[2] eingeführt, und wir werden sie mit den Symbolen Lorenzens bezeichnen.

lE.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu jedem beliebigen Elemente a der Menge *mindestens* ein Element a_1', das die Verknüpfung $a_1'\ a \supset e$ erfüllt.

rE.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu jedem beliebigen Elemente a der Menge *mindestens* ein Element a_1', das die Verknüpfung $a\,a_1' \supset e$ erfüllt.

lU.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu jedem

[1] Lorenzen, S. 317.

[2] S. 317. L. nennt sie spezielle Existenzaxiome bzw. spezielle Unitätsaxiome.

beliebigen Elemente a der Menge *höchstens* ein Element a', das die Verknüpfung $a'\ a \supset e$ erfüllt.

rU.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu jedem beliebigen Elemente a der Menge *höchstens* ein Element a', das die Verknüpfung $a\ a' \supset e$ erfüllt.

Die speziellen Inversaxiome.

In den Definitionen der allgemeinen Inversaxiome ist es möglich, das beliebige Element a durch ein spezielles Element c zu ersetzen. Dann gehen die allgemeinen Inversaxiome in die speziellen Inversaxiome über. Wir definieren sie in folgender Weise.

lε.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu mindestens einem speziellen Element c der Menge *mindestens* ein Element c_1', das die Verknüpfung $c_1'\ c \supset e$ erfüllt.

rε.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu mindestens einem speziellen Element c der Menge *mindestens* ein Element c_1', das die Verknüpfung $c\ c_1' \supset e$ erfüllt.

lυ.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu mindestens einem speziellen Element c der Menge *höchstens* ein Element c', das die Verknüpfung $c'\ c \supset e$ erfüllt.

rυ.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Für mindestens ein solches Element e gibt es zu mindestens einem speziellen Element c der Menge *höchstens* ein Element c', das die Verknüpfung $c\ c' \supset e$ erfüllt.

Wenn das Eins-Existenzaxiom J gleich einem der Axiome $li(E)$ oder $ri(E)$ ist, und wenn es also in der Menge ein Element c gibt, das eine der Verknüpfungen $e\ c \supset c$ oder $c\ e \supset c$ erfüllt, soll das in den Definitionen der speziellen Inversaxiome auftretende Element c mit diesem Element c identisch sein. Diese Bedingung, die ein wenig uneigentlich scheinen kann, ist darum eingeführt, weil es sonst nur wenige Fälle gäbe, wo wir die speziellen Inversaxiome verwenden könnten.

Eine Anzahl von Axiomen werden wir ein *Axiomensystem* oder ein *System* nennen.

Wenn es in der Menge ein Inversaxiom, z. B. $lE.J$, gibt, sagen wir, dass das Element mit der Eigenschaft J sogar die *Eigenschaft* $lE.J$ hat.

Wenn in einem Axiomensystem mehrere Inversaxiome bestehen, wollen wir in der ganzen Abhandlung voraussetzen, dass es in der Menge ein Element gibt, das jedes Inversaxiom als Eigenschaft hat. In einer späteren Arbeit wollen wir solche Systeme untersuchen, die Inversaxiome mit verschiedenen Einselementen enthalten.

5. *Die Produkttafel.*

Nehmen wir an, dass die betrachtete Menge abzählbar ist. Es ist dann vorteilhaft, eine Tafel der sämtlichen Produkte zweier Elemente aufzustellen. Eine solche Tafel werden wir eine *Produkttafel* nennen.[1] Solche Produkttafeln kommen oft in der Literatur vor.

Wenn wir eine Produkttafel aufstellen wollen, ist es vorteilhaft, die Elemente der Menge mit den Ziffern *1*, *2*, *3*, ... zu bezeichnen. Zu jedem Element der Menge gehört genau eine Zeile und eine Kolonne der Produkttafel. Man bezeichnet sowohl die Zeilen als die Kolonnen der Reihe nach mit den Bezeichnungen der entsprechenden Elemente, d.h. den Ziffern *1*, *2*, *3*, ... In der Parzelle, welche von dem Durchschnitt der mit a bezeichneten Zeile und der mit b bezeichneten Kolonne gebildet wird, schreibt man das Produkt von a mit b.

Im Folgenden wollen wir die Nummern der Zeilen und Kolonnen weglassen, wenn eine Menge nur wenige Elemente umfasst. Dann ist es selbstverständlich, dass die erste Zeile und die erste Kolonne dem Element *1* entspricht usw.

Wenn die Elemente einer Menge in der Form einer Produkttafel gegeben sind, ist es leicht einzusehen, welche Axiome in der Menge bestehen, mit der Ausnahme von dem assoziativen Gesetz.

Es ist nicht schwer, die Richtigkeit der folgenden Regeln zu bestätigen.

Die allgemeinen Existenzaxiome.

E: Jede Parzelle enthält mindestens ein Element.
lE: Jede Kolonne enthält jedes Element mindestens einmal.
rE: Jede Zeile enthält jedes Element mindestens einmal.

Die allgemeinen Unitätsaxiome.

U: Jede Parzelle enthält höchstens ein Element.
lU: Jede Kolonne enthält jedes Element höchstens einmal.
rU: Jede Zeile enthält jedes Element höchstens einmal.

---

[1] Lorenzen, S. 319, nennt sie ‚Multiplikationstafel', wobei das Wort zitiert ist.

Die Eins-Existenzaxiome.

e: Es gibt mindestens eine Zeile und eine Kolonne, wo die erste Parzelle mindestens das Element *1* enthält, die zweite Parzelle mindestens das Element *2* enthält, usw.

lI(E): Es gibt mindestens eine Zeile, wo die erste Parzelle mindestens das Element *1* enthält, die zweite Parzelle mindestens das Element *2* enthält, usw.

rI(E): Es gibt mindestens eine Kolonne, wo die erste Parzelle mindestens das Element *1* enthält, die zweite Parzelle mindestens das Element *2* enthält, usw.

I(E): Es gibt mindestens eine von den Parzellen, die von dem Zusammentreffen einer Zeile und einer Kolonne derselben Nummer gebildet wird, die mindestens das Element derselben Nummer enthält.

li(E): Es gibt mindestens eine Kolonne, die das Element mit der Nummer derselben Kolonne mindestens einmal enthält.

ri(E): Es gibt mindestens eine Zeile, die das Element mit der Nummer derselben Zeile mindestens einmal enthält.

Die Eins-Unitätsaxiome.

lI(U): Es gibt höchstens eine Zeile, wo die erste Parzelle mindestens das Element *1* enthält, die zweite Parzelle mindestens das Element *2* enthält, usw.

rI(U): Es gibt höchstens eine Kolonne, wo die erste Parzelle mindestens das Element *1* enthält, die zweite Parzelle mindestens das Element *2* enthält, usw.

I(U): Höchstens eine von den Parzellen, die von dem Zusammentreffen einer Zeile und einer Kolonne derselben Nummer gebildet wird, enthält mindestens das Element derselben Nummer.

li(U): Jede Kolonne enthält das Element mit der Nummer derselben Kolonne höchstens einmal.

ri(U): Jede Zeile enthält das Element mit der Nummer derselben Zeile höchstens einmal.

Die allgemeinen Inversaxiome.

lE.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft *J*. Mindestens eines dieser Elemente kommt in jeder Kolonne mindestens einmal vor.

rE.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft *J*. Mindestens eines dieser Elemente kommt in jeder Zeile mindestens einmal vor.

lU.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente kommt in jeder Kolonne höchstens einmal vor.

rU.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente kommt in jeder Zeile höchstens einmal vor.

Die speziellen Inversaxiome.

lε.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente e kommt in mindestens einer der Kolonnen (in der Kolonne c, wenn J gleich $li\,(E)$ oder $ri\,(E)$ ist und $e\ c \supset c$ bzw. $c\ e \supset c$ gilt) mindestens einmal vor.

rε.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente e kommt in mindestens einer der Zeilen (in der Zeile c, wenn J gleich $li\,(E)$ oder $ri\,(E)$ ist und $e\ c \supset c$ bzw. $c\ e \supset c$ gilt) mindestens einmal vor.

lυ.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente e kommt in mindestens einer der Kolonnen (in der Kolonne c, wenn J gleich $li\,(E)$ oder $ri\,(E)$ ist und $e\ c \supset c$ bzw. $c\ e \supset c$ gilt) höchstens einmal vor.

rυ.J: In der Menge gibt es mindestens ein Element mit der Eigenschaft J. Mindestens eines dieser Elemente e kommt in mindestens einer der Zeilen (in der Zeile c, wenn J gleich $li\,(E)$ oder $ri\,(E)$ ist und $e\ c \supset c$ bzw. $c\ e \supset c$ gilt) höchstens einmal vor.

6. *Das assoziative Gesetz. Die Aufstellung des Schemas.*

Wir werden nun das assoziative Gesetz in solcher Weise formulieren, dass es möglichst keine Existenzbedingungen oder Unitätsbedingungen enthält. Um die Verwendung des assoziativen Gesetzes anschaulicher zu machen, werden wir das sogenannte *Schema* der Produkte von drei Elementen einführen, das im wesentlichen von Lorenzen[1] aufgestellt ist.

Wir betrachten eine nichtleere Menge, und wir nehmen an, dass a, b und c drei beliebige Elemente der Menge sind, die nicht notwendig verschieden sind. Wenn die Produkte ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$ existieren, bezeichnen wir sie folgendermassen.

$$a\,b = u = (u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots).$$
$$b\,c = v = (v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots).$$
$$(a\,b)\,c = (u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots)\,c = t = (t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots).$$
$$a\,(b\,c) = a\,(v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots) = w = (w_1, w_2, \ldots, w_j, \ldots).$$

[1] S. 318.

Weil wir nicht vorausgesetzt haben, dass die Produkte eindeutig sind, kann es vorkommen, dass sie eine Reihe von Werten annehmen. Mit den Symbolen u, v, t und w bezeichnen wir die Menge aller Werte von ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$. Mit u_h bezeichnen wir einen der Werte von ab, mit v_k einen der Werte von bc, mit t_i einen der Werte von $(ab)c$ und mit w_j einen der Werte von $a(bc)$.

Um eine Übersicht der verschiedenen Produkte zu gewinnen, führen wir das *Schema* ein. Wir gehen von drei Elementen a, b und c der Menge aus, und wenn die Produkte ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$ existieren, bezeichnen wir sie wie oben.

Wir können nun die Produkte in folgender Weise schreiben.

$$\begin{array}{ccccc} & & t & & \\ & u & & & \\ a & & b & & c \\ & & & v & \\ & & w & & \end{array}$$

Wenn alle Produkte eindeutig sind, bezeichnet jedes der Symbole u, v, t und w nur ein einziges Element. In diesem Falle ist es oft zweckmässig, das Schema durch eine Reihe von Gleichungen zu ersetzen. Das Schema wird dann in folgender Weise geschrieben.

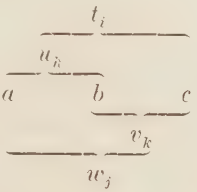
$$t = u\,c = (a\,b)c = a(b\,c) = a\,v = w.$$

Wenn die Eindeutigkeit der Produkte nicht vorausgesetzt ist, ist es zweckmässig, das Schema in solcher Weise zu schreiben, dass man sofort einsieht, dass die Eindeutigkeit der Komposition nicht besteht. In diesen Fällen werden wir die ganzen Produkte von ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$ in das Schema einsetzen. Dann werden wir das Schema in folgender Weise schreiben.

$$\begin{array}{ccccc} & & (t_1, \ldots) & & \\ & (u_1, \ldots) & & & \\ a & & b & & c \\ & & & (v_1, \ldots) & \\ & & (w_1, \ldots) & & \end{array}$$

Es ist oft zweckmässig, in das Schema nur eines der Produkte t und w einzusetzen. Denn wenn das Axiom E besteht, wissen wir ja, dass die beiden Produkte t und w existieren.

Es gibt Fälle, wo es zweckmässig ist, ein Schema aufzustellen, das nur ein Element aus jedem der Produkte ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$ enthält. Wenn u_h einer der Werte von ab, v_k einer der Werte von bc, t_i einer der Werte von $u_h\, c$ und w_j einer der Werte von $a\, v_k$ ist, können wir das folgende Schema aufstellen.



Wir werden nun eine Formulierung des assoziativen Gesetzes aufstellen, die wir in dieser Arbeit benutzen wollen. Sie ist auch von Baer–Levi[1] und Lorenzen[2] benutzt und lautet folgendermassen.

A: *Wenn für drei Elemente der Menge die Produkte u, v, t und w existieren, bestimmen t und w denselben Wertevorrat.*

Diese Formulierung besagt nicht, dass man, von drei Elementen der Menge ausgehend, immer die Produkte u, v, t und w bestimmen kann. Wenn aber die Produkte existieren, müssen t und w denselben Elementen (demselben Element) entsprechen.

Aus dem assoziativen Gesetz geht hervor, dass wenn t und w existieren und die Komposition nicht eindeutig ist, das Element t_i unter den Elementen w_1, w_2, ... gefunden werden muss.

7. *Notwendige Bedingungen einer Gruppendefinition.*

Schliesslich wollen wir drei notwendige Bedingungen herleiten, die ein Axiomensystem erfüllen muss, um eine Gruppe zu definieren.

Bedingung 1. *Das System muss mindestens eines der Axiome E und U enthalten.*[3]

Beweis: In der folgenden Menge bestehen die Axiome A, lE, rE, lU, rU, $I(U)$ und e, aber die Axiome E und U bestehen nicht.

[1] S. 4.

[2] S. 318.

[3] Lorenzen, S. 319, vgl. Baer-Levi, S. 5. Lorenzen beweist auch, dass ein Axiomensystem, das eine Gruppe definieren soll, eines der Axiome U, lU oder rU enthalten muss. Dieser Satz besteht, wenn wir nur solche Axiomensysteme betrachten, die aus den von Lorenzen eingeführten Axiomen bestehen. Im Abschnitt III werden wir zeigen, dass diese Bedingung in unserer Arbeit nicht notwendig ist, weil wir das Axiom lU in weniger umfassende Axiome zerlegt haben.

1	2	3
2	1.3	–
3	–	(1.2)

Das – bedeutet, dass das entsprechende Produkt nicht existiert.

Bedingung 2. *Das System muss mindestens eines der Axiome E, lE und rE enthalten.*[1]

Beweis: In der folgenden Menge bestehen die Axiome A, U, lU, rU, $lE.e$, $rE.e$ und $I(U)$, aber die Axiome E, lE und rE bestehen nicht.

1	2	3
2	1	–
3	–	1

Bedingung 3. *Das System muss das Axiom A enthalten.*[1]

Beweis: In der folgenden Menge bestehen die Axiome E, lE, rE, U, lU, rU, $I(U)$ und e, aber das Axiom A besteht nicht.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	1	5	2	4
4	5	2	1	3
5	4	1	3	2

In dieser Menge ist z.B.

$$2(3\,5) = 2\,4 = 5, \quad (2\,3)5 = 4\,5 = 3.$$

In einer endlichen Menge mit höchstens vier Elementen folgt das Axiom A aus den Axiomen E, lE, rE, U, lU, rU, $I(U)$ und e.[2]

Wir nehmen an, dass ein Axiomensystem besteht, aus welchem man alle diejenigen Axiome herleiten kann, die in einer der klassischen Definitionen enthalten sind. Dann leuchtet ein, dass wir eine Gruppe dadurch definieren können, dass wir die Gültigkeit dieses Systems vorschreiben. Ein solches System werden wir eine *Gruppendefinition* oder *Definition* nennen. Um zu beweisen, dass ein gegebenes System eine Definition ist, ist es notwendig zu zeigen, dass aus dem System alle diejenigen Axiome hergeleitet werden können, die in einer der klassischen Definitionen enthalten sind. Obgleich das Wort ‚Definition' also ein wenig uneigentlich scheinen kann, werden wir es in dieser Arbeit benutzen.

[1] Siehe Fussnote 3 auf voriger Seite.

[2] Nagell, Lärobok i algebra, S. 273.

ABSCHNITT II

Definitionen, die das Axiom U enthalten.

8. *Einleitung.*

In diesem Abschnitt werden wir alle Definitionen der im Abschnitt I definierten Axiome betrachten, die das Axiom U enthalten. Zunächst werden wir Hilfssätze beweisen, die die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit gewisser Axiome voneinander behandeln. Dann werden wir 21 Gruppendefinitionen herleiten.

9. *Hilfssätze.*

Wir werden nun einige Hilfssätze beweisen, die wir später benutzen wollen.

Hilfssatz 1. *Wenn das Axiom $lI(E)$ besteht, bestehen auch die Axiome $I(E)$, $li(E)$ und $ri(E)$.*

Hilfssatz 2. *Wenn das Axiom $I(E)$ besteht, bestehen auch die Axiome $li(E)$ und $ri(E)$.*

Hilfssatz 3. *Wenn das Axiom lE besteht, besteht auch das Axiom $li(E)$.*

Beweis: Diese Hilfssätze folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Hilfssatz 4. *Wenn die Axiome A, E, U, $lE.i$ und $lU.i$ bestehen, und wenn d ein Element mit den Eigenschaften $lE.i$ und $lU.i$ ist, bestehen die Gleichungen $e\,d = d$, $d\,e = d$ und $d'\,d = e$, wo man die Elemente e und d' aus d bestimmen kann. Das Element e hat sogar die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$.*

Zu jedem beliebigen Elemente a der Menge gibt es genau ein Element a', das die Gleichung $a'\,a = e$ erfüllt. Ferner bestehen die Gleichungen $e\,a' = a'$, $a\,a' = e_a$ und $e_a\,e_a = e_a$.

Beweis: Wenn d ein Element mit den Eigenschaften $lE.i$ und $lU.i$ ist, besteht die Gleichung $e\,d = d$. Dann folgt

$$(e\,e)d = e(e\,d) = e\,d = d.$$

Nach $lU.i$ gilt $e\,e = e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $I(E)$ hat.

Wegen $lE.i$ und $lU.i$ gilt $d_a\,e = d$. Dann erhalten wir

$$d\,e = (d_a\,e)\,e = d_a(e\,e) = d_a\,e = d,$$

woraus $d\,e = d$ folgt.

Wegen E und U gilt $d\,d = d^2$, und aus $lE.i$ und $lU.i$ folgt $d'\,d^2 = d$. Nun bilden wir

$$(d'\,d)\,d = d'\,(d\,d) = d'\,d^2 = d = e\,d,$$

woraus wegen $lU.i$ $d'\,d = e$ folgt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt wegen $lE.i$ und $lU.i$ $f'\,a = d$, und nach E und U gilt $d'\,f' = a'$. Wir erhalten daraus

$$a'\,a = (d'\,f')\,a = d'\,(f'\,a) = d'\,d = e,$$

woraus $a'\,a = e$ folgt. Damit ist klar, dass das Element e die Eigenschaft $lE.I$ hat.

Wir können nicht ohne weiteres schliessen, dass auch das Axiom $lU.I$ gilt. Um dies zu beweisen nehmen wir an, dass es auch ein Element a_1' gäbe, das die Gleichung $a_1'\,a = e$ erfülle. Nach E und U bilden wir $a\,d = f$, $a'\,f = d_\beta$ und $a_1'\,f = d_\gamma$. Dann können wir die folgenden Schemata bilden.

$$\overbrace{\overbrace{a'}^{e}\ \overbrace{a\ \ d}^{f}}^{d_\beta}, \qquad \overbrace{\overbrace{a_1'}^{e}\ \overbrace{a\ \ d}^{f}}^{d_\gamma}.$$

Aus A und U folgen $d_\beta = d$ und $d_\gamma = d$. Wegen $lU.i$ gilt dann $a_1' = a'$, womit gezeigt ist, dass das Element e auch die Eigenschaft $lU.I$ hat.

Aus den Gleichungen

$$(e\,a')\,a = e\,(a'\,a) = e\,e = e = a'\,a$$

folgt wegen $lU.I$ $e\,a' = a'$.

Nach E und U gilt $a\,a' = e_a$. Dann erhalten wir

$$a'\,e_a = a'\,(a\,a') = (a'\,a)\,a' = e\,a' = a'$$

und

$$e_a\,e_a = (a\,a')\,e_a = a\,(a'\,e_a) = a\,a' = e_a,$$

woraus $e_a\,e_a = e_a$ folgt. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 5. *Wenn die Axiome A, E, U, $lE.i$ und $li(U)$ bestehen, und wenn d ein Element mit der Eigenschaft $lE.i$ ist, bestehen die Gleichungen $e\,d = d$ und $d\,e = d$, wo man das Element e aus d bestimmen kann. Das Element e hat sogar die Eigenschaft $lE.I$.*

Beweis: Wenn d ein Element mit der Eigenschaft $lE.i$ ist, gibt es wegen $lE.i$ und $li(U)$ genau ein Element e, das $e\,d = d$ erfüllt. Dann folgt

$$(e\,e)d = e(e\,d) = e\,d = d.$$

Wegen $li(U)$ gilt $e\,e = e$. Das Element e hat also die Eigenschaft $I(E)$.

Wegen $lE.i$ besteht $d_1\,e = d$, und wir bilden

$$d\,e = (d_1\,e)e = d_1(e\,e) = d_1\,e = d.$$

Also gilt $d\,e = d$.

Wegen E und U gilt $d\,d = d^2$, und nach $lE.i$ besteht $d_1'\,d^2 = d$. Dann erhalten wir

$$(d_1'\,d)d - d_1'(d\,d) = d_1'\,d^2 - d = e\,d,$$

woraus $d_1'\,d = e$ folgt. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen die Gleichungen $f_1'\,a = d$ und $d_1'\,f_1' = a_1'$. Wir bilden nun

$$a_1'\,a = (d_1'\,f_1')a = d_1'(f_1'\,a) = d_1'\,d = e.$$

Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $lE.I$ hat, und hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 6. *Wenn die Axiome A, E, U, $li(E)$ und $li(U)$ bestehen, hat ein Element mit der Eigenschaft $li(E)$ sogar die Eigenschaft $I(E)$.*

Beweis: Wegen $li(E)$ und $li(U)$ gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man genau ein Element e bestimmen kann, das die Gleichung $e\,c = c$ erfüllt. Nun bilden wir

$$(e\,e)c = e(e\,c) = e\,c = c.$$

Aus $li(U)$ folgt $e\,e = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 7. *Wenn die Axiome A, E, U und $r\varepsilon.li$ bestehen, hat ein Element mit der Eigenschaft $r\varepsilon.li$ auch die Eigenschaft $I(E)$.*

Beweis: Der Annahme zufolge bestehen die Gleichungen $e\,c = c$ und $c\,c_1' = e$, wo e ein Element mit der Eigenschaft $r\varepsilon.li$ ist.

Dann erhalten wir

$$e\,e = e(c\,c_1') = (e\,c)c_1' = c\,c_1' = e.$$

Also hat das Element e die Eigenschaft $I(E)$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 8. *Wenn die Axiome A, E, U, $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ bestehen, hat ein Element mit den Eigenschaften $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ sogar die Eigenschaft $ri(E)$.*

Beweis: Auf Grund der Annahme bestehen die Gleichungen $e\,c = c$ und $c'\,c = e$, wo das Element e die Eigenschaften $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ hat. Dann bestehen die Gleichungen

$$(c'\ e)c - c'(e\ c) = c'\ c = e.$$

Aus *lv.li* folgt $c'\ e = c'$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 9. *Wenn die Axiome A, lE, U und ri(E) bestehen, hat ein Element mit der Eigenschaft ri(E) sogar die Eigenschaft rI(E).*[1]

Beweis: Wegen $ri(E)$ gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das die Gleichung $c\ e = c$ erfüllt. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen nach lE die Gleichungen $a_1\ e = a$ und $b_1\ c = a_1$. Dann ist es möglich, die folgenden Gleichungen zu bilden.

$$a_1 = b_1\ c = b_1(c\ e) = (b_1\ c)e = a_1\ e = a.$$

Aus $a_1 = a$ folgt $a\ e = a$. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat.

Hilfssatz 10. *Wenn die Axiome A, E, lE, U und lU bestehen, besteht das Axiom rI(E).*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es zu jedem beliebigen Elemente a der Menge genau ein Element e_a, das die Gleichung $e_a\ a = a$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 4 hat e_a die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 9 hat es sogar die Eigenschaft $rI(E)$. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir werden nun einige Sätze beweisen, die die Existenz gewisser Eins-Unitätsaxiome behandeln.

Hilfssatz 11. *Wenn das Axiom lU besteht, bestehen auch die Axiome li(U) und lI(U).*

Hilfssatz 12. *Wenn das Axiom li(U) besteht, besteht auch das Axiom lI(U).*

Hilfssatz 13. *Wenn das Axiom I(U) besteht, bestehen auch die Axiome lI(U) und rI(U).*

Beweis: Diese Hilfssätze folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Hilfssatz 14. *Wenn das Axiom lU.i besteht, besteht auch das Axiom lI(U).*

Beweis: Wenn d ein Element mit der Eigenschaft $lU.i$ ist und es in der Menge zwei Elemente e und e_a mit der Eigenschaft $lI(E)$ gäbe, bestünden die Verknüpfungen $e\ d \supset d$ und $e_a\ d \supset d$. Aus $lU.i$ folgt dann $e_a = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 15. *Wenn die Axiome A, lE und U bestehen, besteht auch das Axiom lI(U).*

[1] Vgl. Lorenzen, S. 322.

Beweis: Wenn es in der Menge zwei Elemente e und e_a mit der Eigenschaft $lI(E)$ gäbe, bestände nach lE die Gleichung $e_1' e_a = e$.
Daraus folgt

$$e_a = e\, e_a = (e_1' e_a) e_a = e_1' (e_a e_a) = e_1' e_a = e,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 16. *Wenn die Axiome A, E, U, lU und rU bestehen, besteht auch das Axiom $I(U)$.*

Beweis: Wenn das Axiom $I(U)$ nicht gälte, gäbe es in der Menge zwei Elemente a und b, für welche die Gleichungen $a\, a = a$ und $b\, b = b$ gelten.
Aber dann wäre

$$a(a\, b) = (a\, a) b = a\, b = a(b\, b).$$

Aus rU folgt

$$a\, b = b\, b,$$

und nach lU ist $a = b$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 17. *Wenn die Axiome A, E, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ und $li(U)$ bestehen, besteht auch das Axiom $rI(U)$.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge zwei Elemente d und c, zu welchen man genau ein h' bestimmen kann, das die Gleichung $c\, h' = d$ erfüllt. Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $rI(E)$ ist, können wir die folgenden Gleichungen bilden.

$$c(e\, h') = (c\, e) h' = c\, h' = d.$$

Wegen $rv.i$ besteht also die Gleichung $e\, h' = h'$. Es ist klar, dass wenn es noch ein Element e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, bestände $e_a h' = h'$. Aus $li(U)$ folgt dann $e_a = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

10. ***Definitionen.***

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Axiomensysteme eine Gruppe definieren.

1) A, E, U, $lE.lI$
2) A, lE, U, lI
3) A, lE, U, $rE.i$
4) A, lE, U, $ri(E)$, $rI(U)$
5) A, E, U, $lE.ri$, $rU.ri$
6) A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $rU.i$
7) A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $rE.i$
8) A, E, U, $lE.i$, $rU.i$, $li(U)$
9) A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $I(U)$

10) A, E, U, $lE.i$, $lU.i$, $ri(U)$
11) A, E, U, $lE.rI$, $rI(U)$
12) A, E, lE, U, $li(U)$, $rI(U)$
13) A, lE, U, $r\varepsilon.ri$, $rv.ri$
14) A, E, lE, U, $lv.i$, $rI(U)$
15) A, E, lE, U, $r\varepsilon.li$, $rI(U)$
16) A, E, lE, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$, $li(U)$
17) A, E, U, $lE.rI$, $r\varepsilon.rI$, $rv.rI$
18) A, E, lE, U, $r\varepsilon.li$, $rv.li$
19) A, E, lE, U, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$
20) A, E, U, $lE.li$, $rU.li$, $r\varepsilon.li$
21) A, E, U, $lE.li$, $rU.li$, $lv.li$

Definition 1 wurde zum erstenmal von Dickson[1], Definition 2 von Garver[2] und Definition 3 von Lorenzen[3] hergeleitet. Lorenzen leitet auch eine vierte Definition her, die umfassender als Definition 4 ist. Er hat sogar die Axiome A und U durch ein einziges Axiom ersetzt.

Definition 1. *Die Axiome A, E, U und $lE.lI$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaft $lE.lI$ hat. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen nach $lE.lI$ die Gleichungen $a_1' a = e$ und $a_1 a_1' = e$. Dann bilden wir

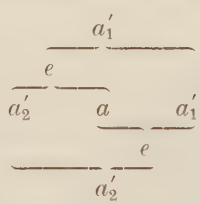
$$a_1 e = a_1(a_1' a) = (a_1 a_1')a = e a = a$$

und

$$a e \quad (a_1 e)e - a_1(e e) = a_1 e = a.$$

Weil die Gleichung $a e = a$ besteht, hat das Element e auch die Eigenschaft $rI(E)$. Dann gilt $a_1 e = a_1$. Aus U folgt $a_1 = a$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.e$ hat.

Wir wollen nun beweisen, dass die Axiome $lU.e$ und $rU.e$ bestehen. Sonst gäbe es zwei Elemente a_1' und a_2', die die Gleichungen $x a = e$ und $a x = e$ erfüllten. Dann wäre es möglich, das folgende Schema zu bilden.



[1] Trans. Amer. Math. Soc. *6* (1905), S. 198.
[2] Amer. J. of Math. *57* (1935), S. 276–280.
[3] S. 323.

Wegen A und U gilt $a_2' = a_1'$. Damit ist gezeigt, dass auch die Axiome $lU.e$ und $rU.e$ bestehen, und hiermit ist klar, dass die gegebenen Axiome eine Gruppe definieren.

Definition 2. *Die Axiome lE, U und $lI(E)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaft $lI(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 9 hat dieses Element auch die Eigenschaft $rI(E)$.

Wenn b ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen wegen lE die Gleichungen $b_1' b = e$ und $b_1 b_1' = e$, und nach e bestehen $b_1 e = b_1$ und $e b = b$. Dann erhalten wir

$$b_1 = b_1 e = b_1 (b_1' b) = (b_1 b_1') b = e b = b,$$

woraus $b b_1' = e$ folgt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, können wir nach lE die Gleichungen $c_1 b_1' = a$ und $a_1 b = c_1$ aufstellen. Wir bilden nun

$$a_1 = a_1 e = a_1 (b b_1') = (a_1 b) b_1' = c_1 b_1' = a,$$

woraus $a b = c_1$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Axiom E besteht.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 3. *Die Axiome A, lE, U und $rE.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d, das die Eigenschaft $rE.i$ hat. Wegen $rE.i$ gibt es mindestens ein Element e, das die Gleichung $d e = d$ erfüllt. Das Element e hat also die Eigenschaft $ri(E)$, und wegen Hilfssatz 9 hat es sogar die Eigenschaft $rI(E)$.

Nach $rE.i$ besteht die Gleichung $e d_1 = d$, und nach lE bestehen $d_1' d_1 = e$ und $d_2 d_1' = e$. Dann bilden wir

$$d_2 = d_2 e = d_2 (d_1' d_1) = (d_2 d_1') d_1 = e d_1 = d,$$

woraus $d d_1' = e$ folgt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen wegen lE die Gleichungen $e_1 a = a$, $d_3 d_1' = e_1$ und $e_2 d = d_3$. Dann erhalten wir

$$e_2 = e_2 e = e_2 (d d_1') = (e_2 d) d_1' = d_3 d_1' = e_1,$$

woraus $e_1 d = d_3$ folgt.

Nach $rE.i$ besteht die Gleichung $a f_1' = d$, und wir bilden

$$d_3 = e_1 d = e_1 (a f_1') = (e_1 a) f_1' = a f_1' = d.$$

Dann gilt $e_1 d = d$. Schliesslich erhalten wir

$$e_1 = e_1 e = e_1 (d d_1') = (e_1 d) d_1' = d d_1' = e,$$

woraus $e\,a = a$ fogt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 4. *Die Axiome A, lE, U, ri(E) und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $ri(E)$. Wegen Hilfssatz 9 hat es auch die Eigenschaft $rI(E)$.

Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen lE $a_1' a = e$, $a_1 a_1' = e$, $e_1 a = a$ und $a_{a_1} a_1' = e_1$. Dann bilden wir

$$a_{a_1} = a_{a_1} e = a_{a_1}(a_1' a) = (a_{a_1} a_1') a = e_1 a = a,$$

woraus $a_{a_1} = a$ folgt. Dann gilt $a a_1' = e_1$.

Wegen lE bestehen $e_1' e_1 = e$, $e_{a_1} e_1' = e$, $e_{\beta_1} e_1 = e_{a_1}$ und $e_{\gamma_1} e_1' = e_{\beta_1}$. Wir erhalten

$$e_{\gamma_1} = e_{\gamma_1} e = e_{\gamma_1}(e_1' e_1) = (e_{\gamma_1} e_1') e_1 = e_{\beta_1} e_1 = e_{a_1}.$$

Aus $e_{\gamma_1} = e_{a_1}$ folgt wegen U $e_{\beta_1} = e$. Dann gilt $e e_1 = e_{a_1}$.

Wegen lE bestehen auch $e_{\varepsilon_1} a = a_1$ und $a_{\beta_1} a_1' = e_{\varepsilon_1}$, und wir bilden

$$a_{\beta_1} = a_{\beta_1} e = a_{\beta_1}(a_1' a) = (a_{\beta_1} a_1') a = e_{\varepsilon_1} a = a_1,$$

woraus $a_{\beta_1} = a_1$ folgt. Wegen U gilt dann $e_{\varepsilon_1} = e$ und $e a = a_1$.

Schliesslich bilden wir

$$e_{a_1} = e e_1 = e(a a_1') = (e a) a_1' = a_1 a_1' = e.$$

Damit ist gezeigt, dass das Element e_1 die Eigenschaft $ri(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 9 hat es auch die Eigenschaft $rI(E)$, und wegen $rI(U)$ gilt $e_1 = e$. Dann hat e die Eigenschaft $rE.rI$, womit die Definition auf Definition 3 zurückgeführt ist.

Definition 5. *Die Axiome A, E, U, lE.ri und rU.ri definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 7 hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $rU.ri$ sogar die Eigenschaft $I(E)$.

Wenn e ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $rU.I$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen $lE.I$ die Gleichung $a_1' a = e$. Dann erhalten wir

$$a_1'(a e) = (a_1' a) e \quad e e \quad e = a_1' a.$$

Aus $rU.I$ folgt $a e = a$, womit bewiesen ist, dass e auch die Eigenschaft $rI(E)$ hat.

Ferner erhalten wir

$$a_1'(e\,a) = (a_1'\,e)a = a_1'\,a = e.$$

Aus $rU.I$ folgt $e\,a = a$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $lE.lI$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 6. *Die Axiome A, E, U, $lE.i$, $lU.i$ und $rU.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn d ein Element mit den Eigenschaften $lE.i$, $lU.i$ und $rU.i$ ist, können wir nach Hilfssatz 4 genau ein Element e bestimmen, das die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ hat und die Gleichung $d\,e = d$ erfüllt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gibt es wegen $lE.i$ und $lU.i$ zu jedem a genau ein f', das die Gleichung $f'\,a = d$ erfüllt. Dann erhalten wir

$$f'(a\,e) = (f'\,a)e = d\,e = d.$$

Aus $rU.i$ folgt $a\,e = a$, womit gezeigt ist, dass e die Eigenschaft $rI(E)$ hat.

Ferner erhalten wir

$$f'(e\,a) = (f'\,e)a = f'\,a = d.$$

Aus $rU.i$ folgt $e\,a = a$, womit gezeigt ist, dass das Element e auch die Eigenschaft $lE.e$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 7. *Die Axiome A, E, U, $lE.i$, $lU.i$ und $rE.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d, das die Eigenschaften $lE.i$, $lU.i$ und $rE.i$ hat. Wegen Hilfssatz 4 gibt es genau ein Element e, das die Gleichung $e\,d = d$ erfüllt und die Eigenschaft $lE.I$ hat.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen $rE.i$ $a\,f_1' = d$. Dann gilt

$$(e\,a)f_1' = e(a\,f_1') = e\,d = d.$$

Aus $lU.i$ folgt $e\,a = a$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $lE.lI$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 8. *Die Axiome A, E, U, $lE.i$, $rU.i$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d,

das die Eigenschaften $lE.i$ und $rU.i$ hat. Wegen Hilfssatz 5 können wir genau ein Element e bestimmen, das die Eigenschaft $lE.I$ hat und die Gleichung $d\,e = d$ erfüllt.

Zu jedem beliebigen Elemente a der Menge gibt es mindestens ein Element f_1', das die Gleichung $f_1'\,a = d$ erfüllt. Dann bilden wir

$$f_1'(a\,e) = (f_1'\,a)e = d\,e = d = f_1'\,a.$$

Aus $rU.i$ folgt $a\,e = a$. Das Element e hat also die Eigenschaft $rI(E)$.

Wir bilden auch

$$f_1'(e\,a) = (f_1'\,e)a = f_1'\,a = d.$$

Aus $rU.i$ folgt $e\,a = a$, womit bewiesen ist, dass das Element e die Eigenschaft $lE.e$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 9. *Die Axiome A, E, U, $lE.i$, $lU.i$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 4 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ hat. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen die Gleichungen $a'\,a = e$ und $a\,a' = e_a$, und nach Hilfssatz 4 hat das Element e_a die Eigenschaft $I(E)$. Aus $I(U)$ folgt dann $e_a = e$. Dann gilt $a\,a' = e$, und das Element e hat auch die Eigenschaft $rE.I$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 10. *Die Axiome A, E, U, $lE.i$, $lU.i$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 4 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ hat. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen nach Hilfssatz 4 die Gleichungen $a'\,a = e$, $a\,a' = e_a$ und $e_a\,e_a = e_a$.

Wegen $lE.I$ und $lU.I$ gibt es in der Menge ein Element e_a', das die Gleichung $e_a'\,e_a = e$ erfüllt. Dann bilden wir

$$e\,e_a = (e_a'\,e_a)e_a = e_a'(e_a\,e_a) = e_a'\,e_a = e,$$

woraus $e\,e_a = e$ folgt. Aber die Gleichung $e\,e = e$ besteht ja auch. Wegen $ri(U)$ gilt dann $e_a = a$, woraus $a\,a' = e$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rE.I$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 11. *Die Axiome A, E, U, lE.rI und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lE.rI$. Zu einem beliebigen Elemente a der Menge gibt es dann mindestens ein Element a'_1, das die Gleichung $a'_1\, a = e$ erfüllt. Wegen E und U gilt $e\, a'_1 = a'_{a_1}$. Dann besteht

$$e\, a'_{a_1} = e\,(e\, a'_1) = (e\, e)\, a'_1 = e\, a'_1 = a'_{a_1}.$$

Ferner erhalten wir

$$a'_{a_1}\, a = (e\, a'_1)\, a = e\,(a'_1\, a) = e\, e = e.$$

Nach E und U gilt $a\, a'_{a_1} = e_a$. Wir wollen nun beweisen, dass e_a die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Dazu bilden wir

$$a'_{a_1}\, e_a = a'_{a_1}\,(a\, a'_{a_1}) = (a'_{a_1}\, a)\, a'_{a_1} = e\, a'_{a_1} = a'_{a_1}$$

und

$$e_a\, e_a = (a\, a'_{a_1})\, e_a = a\,(a'_{a_1}\, e_a) = a\, a'_{a_1} = e_a,$$

womit gezeigt ist, dass e_a die Eigenschaft $I(E)$ hat. Aus $lE.rI$ folgt $e'_{a_1}\, e_a = e$. Nun bilden wir

$$e\, e_a = (e'_{a_1}\, e_a)\, e_a = e'_{a_1}\,(e_a\, e_a) = e'_{a_1}\, e_a = e$$

und

$$a\, e_a = (a\, e)\, e_a = a\,(e\, e_a) = a\, e = e.$$

Damit ist gezeigt, dass das Element e_a die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Aus $rI(U)$ folgt $e_a = e$. Das Element e hat also die Eigenschaft $rE.rI$, und hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 12. *Die Axiome A, E, lE, U, li(U) und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach lE und $li(U)$ kann man zu jedem beliebigen Element a der Menge genau ein e_a bestimmen, das die Gleichung $e_a\, a = a$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 6 hat jedes e_a die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 9 hat es auch die Eigenschaft $rI(E)$.

Aber nach $rI(U)$ sind alle e_a gleich. Dann gibt es ein Element e, das die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 13. *Die Axiome A, lE, U, rε.ri und rv.ri definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn e ein Element mit den Eigenschaften $rε.ri$ und $rv.ri$

ist, hat e wegen Hilfssatz 9 auch die Eigenschaft $rI(E)$. Der Annahme zufolge bestehen die Gleichungen $c\,c' = e$ und $e_1\,c = c$. Dann bilden wir

$$e_1 = e_1\,e = e_1(c\,c') = (e_1\,c)c' = c\,c' = e,$$

woraus $e\,c = c$ folgt. Wegen lE bestehen auch $c_1'\,c = e$ und $c_1\,c_1' = e$, und wir erhalten

$$c_1 = c_1\,e = c_1(c_1'\,c) = (c_1\,c_1')c = e\,c = c.$$

Dann gilt $c\,c_1' = e$, und aus $rv.ri$ folgt $c_1' = c'$. Dann besteht $c'\,c = e$.

Wenn es in der Menge noch ein Element e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, bestände wegen lE $c_{a_1}'\,c = e_a$ und $c_{a_1}\,c_{a_1}' = e$. Dann wäre es möglich, die folgenden Gleichungen zu bilden.

$$c_{a_1} = c_{a_1}\,e_a = c_{a_1}(c_{a_1}'\,c) = (c_{a_1}\,c_{a_1}')c = e\,c = c.$$

Dann gilt $c\,c_{a_1}' = e$, und aus $rv.ri$ folgt $c_{a_1}' = c'$ und $c'\,c = e_a$. Wegen U gilt $e_a = e$, womit gezeigt ist, dass das Axiom $rI(U)$ besteht.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 4 zurückgeführt.

Definition 14. *Die Axiome A, E, lE, U, $lv.i$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge zwei Elemente d und c, zu welchen man genau ein h' bestimmen kann, das die Gleichung $h'\,c = d$ erfüllt, und nach lE gibt es mindestens ein e, das $e\,c = c$ erfüllt. Hieraus erhalten wir

$$(h'\,e)c = h'(e\,c) = h'\,c = d.$$

Aus $lv.i$ folgt $h'\,e = h'$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $ri(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 4 zurückgeführt.

Definition 15. *Die Axiome A, E, lE, U, $r\varepsilon.li$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome A, E, U und $r\varepsilon.li$ bestehen, besteht wegen Hilfssatz 7 auch das Axiom $\mathrm{I}(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 4 zurückgeführt.

Definition 16. *Die Axiome A, E, lE, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome A, E, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ und $li(U)$ bestehen, besteht nach Hilfssatz 17 auch das Axiom $rI(U)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 12 zurückgeführt.

Definition 17. *Die Axiome A, E, U, lE.rI, rε.rI und rv.rI definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge besteht $c\,c' = e$, wo e ein Element mit den Eigenschaften *lE.rI*, *rε.rI* und *rv.rI* ist. Wegen Hilfssatz 17 besteht $e\,c' = c'$ und wegen *lE.rI* $c_1'\,c = e$. Dann erhalten wir

$$c_1' = c_1'\,e = c_1'(c\,c') = (c_1'\,c)c' = e\,c' = c',$$

woraus $c'\,c = e$ folgt. Wenn es noch ein Element e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, bestände $e_a\,c' = c'$ wegen Hilfssatz 17. Dann besteht

$$e_a = e_a\,e = e_a(c'\,c) = (e_a\,c')c = c'\,c = e,$$

woraus folgt, dass $rI(U)$ besteht. Hiermit ist diese Definition auf Definition 11 zurückgeführt.

Definition 18. *Die Axiome A, E, lE, U, rε.li und rv.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Ein Element mit den Eigenschaften *rε.li* und *rv.li* hat wegen Hilfssatz 7 und 9 auch die Eigenschaft $rI(E)$, womit die Definition auf Definition 17 zurückgeführt ist.

Definition 19. *Die Axiome A, E, lE, U, lU.i, rε.i und rv.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge besteht $ch' = d$, wo d ein Element mit den Eigenschaften *lU.i*, *rε.i* und *rv.i* ist. Wegen Hilfssatz 4 bestehen auch $e\,d = d$, $d\,e = d$ und $d'\,d = e$, wo e die Eigenschaft *lU.I* und wegen Hilfssatz 9 auch $rI(E)$ hat.

Nach *lE* und *lU.rI* gilt $d_a\,d' = e$, und wir bilden

$$d_a = d_a\,e = d_a(d'\,d) = (d_a\,d')\,d = e\,d = d,$$

woraus $d\,d' = e$ folgt. Nach *E* gilt $h'\,d' = c'$, und wir bilden

$$c\,c' = c(h'\,d') = (c\,h')\,d' = d\,d' = e.$$

Wenn auch $c\,c_1' = e$ bestände, gälte $h_1'\,d' = c_1'$ und $c\,h_1' = d_1$. Dann folgt

$$d_1\,d' = (c\,h_1')\,d' = c(h_1'\,d') = c\,c_1' = e.$$

Wegen *lU.rI* gilt $d_1 = d$, woraus $h_1' = h'$ und $c_1' = c'$ folgt. Dann bestehen *rε.rI* und *rv.rI*, womit die Definition auf Definition 13 zurückgeführt ist.

Definition 20. *Die Axiome A, E, U, lE.li, rU.li und rε.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element

das die Eigenschaften *lE.li*, *rU.li* und *rε.li* hat. Wegen Hilfssatz 7 hat dieses Element auch die Eigenschaft $I(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 21. *Die Axiome A, E, U, lE.li, rU.li und lv.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element, das die Eigenschaften *lE. li*, *rU. li* und *lv. li* hat. Wegen Hilfssatz 8 hat dieses Element auch die Eigenschaft $ri(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

ABSCHNITT III

Definitionen, die das Axiom U nicht enthalten.

11. *Einleitung.*

In diesem Abschnitt betrachten wir diejenigen Gruppendefinitionen, die das Axiom E aber nicht das Axiom U enthalten.

Zuerst wollen wir fünf Hilfssätze beweisen. Dann werden wir 18 Definitionen herleiten.

12. *Hilfssätze.*

Wir beweisen nun einige Hilfssätze, die wir später benutzen wollen.

Hilfssatz 1. *Wenn die Axiome A, E, $lE.I$ und $lU.I$ gelten, und wenn a ein beliebiges Element der Menge und e ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ ist, gelten $a'\,a \supset e$ und $e\,a' \supset a'$.*

Beweis: Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, folgt aus $lE.I$ und $lU.I$ $a'\,a \supset e$, und nach E existiert das Produkt $e\,a' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{} & & \overbrace{} & \\ & (a'_1, \ldots) & & & \\ e & & a' & & a \\ & & & (e, \ldots) & \\ & & (e, \ldots) & & \end{array}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a'_1, a'_2, \ldots$ ein Element a'_h, das die Verknüpfung $a'_h\,a \supset e$ erfüllt. Aus $lU.I$ folgt $a'_h = a'$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Wenn die Axiome A, E, $li(E)$ und $li(U)$ bestehen, gibt es in der Menge ein Element, das die Eigenschaft $I(E)$ hat.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man nach $li(E)$ und $li(U)$ genau ein Element e bestimmen kann, das $e\,c \supset c$ erfüllt. Nach E existiert das Produkt $e\,e = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{} & & \overbrace{} & \\ & (e_1, \ldots) & & & \\ e & & e & & c \\ & & & (c, \ldots) & \\ & & (c, \ldots) & & \end{array}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h\, c \supset c$ erfüllt. Nach $li(U)$ gilt dann $e_h = e$, woraus $e\, e \supset e$ folgt. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. *Wenn die Axiome A, E, $lE.i$ und eines der Axiome $lU.i$ oder $li(U)$ bestehen, und wenn d ein Element mit der Eigenschaft $lE.i$ (und eventuell $lU.i$) ist, gibt es in der Menge genau ein Element e, das die Verknüpfung $e\, d \supset d$ erfüllt und die Eigenschaft $lE.I$ hat.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d, zu welchem man genau ein Element e bestimmen kann, das $e\, d \supset d$ erfüllt. Weil es genau ein Element e gibt, ist es möglich, mit der Hilfe derselben Argumentierung wie im Hilfssatz 2 zu schliessen, dass e die Eigenschaft $I(E)$ hat.

Wegen E und $lE.i$ bestehen $d\, d = (d^2, \ldots)$, $d_1'\, d^2 \supset d$ und $d_1'\, d = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$. Dann ist es möglich, das folgende Schema zu bilden.

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{(e_1, \ldots)}}^{d_1'} \quad \overbrace{d \qquad\qquad d}^{(d^2, \ldots)}}^{(d, \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h\, d \supset d$ erfüllt. Aus $lU.i$ oder $li(U)$ folgt $e_h = e$, und dann gilt $d_1'\, d \supset e$.

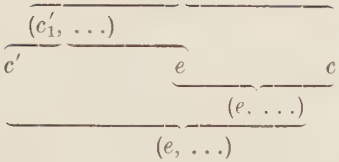
Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen $f_1'\, a \supset d$ und $d_1'\, f_1' = (a_1', a_2', \ldots, a_h', \ldots)$. Dann bilden wir

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{(a_1', \ldots)}}^{d_1'} \quad \overbrace{f_1' \qquad\qquad a}^{(d, \ldots)}}^{(e, \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1', a_2', \ldots$ ein Element a_h', das $a_h'\, a \supset e$ erfüllt. Also hat das Element e die Eigenschaft $lE.I$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Wenn die Axiome A, E, $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ bestehen, hat ein Element mit den Eigenschaften $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ auch die Eigenschaft $ri(E)$.*

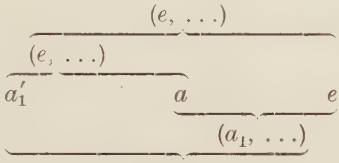
Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man ein Element e bestimmen kann, das $e\, c \supset c$ erfüllt und die Eigenschaften $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ hat. Dann gibt es genau ein Element c', das $c'\, c \supset e$ erfüllt. Wegen E besteht $c'\, e = (c_1', c_2', \ldots, c_h', \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $c_1', c_2', \ldots$ ein Element c_h', das $c_h'\ c \supset e$ erfüllt. Nach *lv.li* gilt $c_h' = c'$, woarus $c'\ e \supset c'$ folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

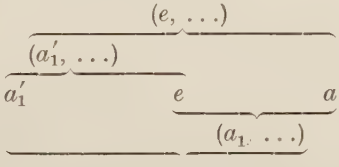
Hilfssatz 5. *Wenn die Axiome A, E, $lE.I$ und $rU.I$ bestehen, hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $rU.I$ auch die Eigenschaft e.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften $lE.I$ und $rU.I$ hat. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt wegen $lE.I$ $a_1'\ a \supset e$, und nach E existiert $a\ e = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ ein Element a_k, das $a_1'\ a_k \supset e$ erfüllt. Aus $rU.I$ folgt $a_k = a$. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat.

Nach E existiert $e\ a = (a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots)$, und wir bilden



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ ein Element a_h, das $a_1'\ a_h \supset e$ erfüllt. Aus $rU.rI$ folgt $a_h = a$. Dann besteht $e\ a \supset a$, womit gezeigt ist, dass das Element e auch die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

13. ***Definitionen.***

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Axiomensysteme eine Gruppe definieren.

1) A, E, $lE.lI$, $lU.lI$, $li(U)$
2) A, E, $lE.lI$, $lU.lI$, $ri(U)$

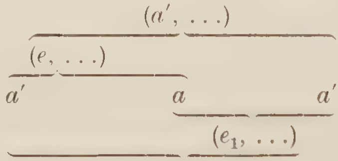
3) $A, E, lE.rI, lU.rI, ri(U)$
4) $A, E, lE.li, lU.li, li(U), I(U)$
5) $A, E, lU, lE.i, rI(U)$
6) $A, E, lE.ri, lU.ri, ri(U), I(U)$
7) $A, E, lE.li, lU.li, ri(U), I(U)$
8) $A, E, lU, lE.i, rE.i$
9) $A, E, lE.i, lU.i, rU$
10) $A, E, lE.li, rU.li, li(U)$
11) $A, E, lE.i, rU, li(U)$
12) $A, E, lE.ri, rU.ri, ri(U)$
13) $A, E, lU, lE.i, r\varepsilon.i, rv.i$
14) $A, E, lE.ri, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U), I(U)$
15) $A, E, lE, rU, lv.i$
16) $A, E, lE, rU, r\varepsilon.li$
17) $A, E, lE.ri, rU.ri, r\varepsilon.ri, li(U)$
18) $A, E, lE.li, rU.li, lv.li, ri(U)$

Lorenzen[1] leitet zwei Definitionen her, die den Definitionen 1 und 12 entsprechen. Anstatt des Axioms $li(U)$ verwendet er das umfassendere Axiom lU.

Baer–Levi[2] leiten auch zwei Definitionen her. Die erste von ihnen umfasst die Axiome A, E, lE, rE und lU und ist mehr umfassend als Definition 8, wo die Axiome lE und rE gegen $lE.i$ und $rE.i$ vertauscht sind. Die zweite Definition von Baer und Levi umfasst die Axiome A, E, lE. lU und rU. Die Definitionen 5, 9–11, 14 und 16 sind Vereinfachungen dieser Definition.

Definition 1. *Die Axiome A, E, $lE.lI$, $lU.lI$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

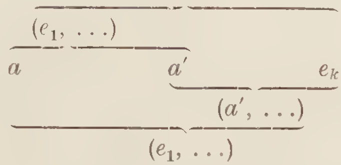
Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.lI$ und $lU.lI$. Wenn a ein beliebiges Element ist, besteht nach $lE.lI$ und $lU.lI$ $a'a \supset e$, und nach E besteht $aa' = (e_1, e_2, \dots, e_h, \dots, e_k, \dots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



[1] S. 323. L. hat sogar die Axiome A und E durch ein einziges Axiom ersetzt.
[2] S. 9.

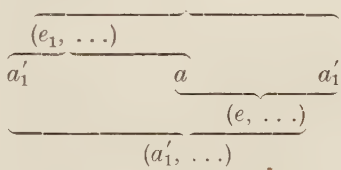
Nach A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $a' e_k \supset a'$ erfüllt.

Wir bilden auch das Schema



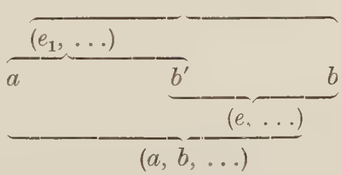
Nach A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h e_k \supset e_k$ erfüllt. Weil e die Eigenschaft $lI(E)$ hat, gilt auch $e\, e_k \supset e_k$. Aus $li(U)$ folgt dann $e_h = e$, woraus $a\, a' \supset e$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rE.lI$ hat, und wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft $rE.e$.

Zunächst werden wir beweisen, dass das Element e auch die Eigenschaft $rU.e$ hat. Wenn a_1' von a' verschieden ist, besteht $a_1' a = (e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots)$, und wir bilden



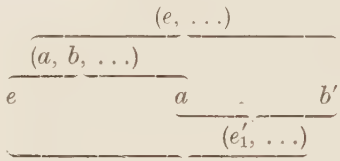
Nach A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_j, das $e_j a_1' \supset a_1'$ erfüllt. Aus $li(U)$ folgt $e_j = e$ und $a_1' a \supset e$. Nach $lU.e$ gilt dann $a_1' = a'$. Damit ist gezeigt, dass das Element e auch die Eigenschaft $rU.e$ hat.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit der Verknüpfung $a\, e \supset a$ beweisen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass $a\, e = (a, b, \ldots)$ besteht, und wir werden zeigen, dass $b = a$ ist. Nach $lE.e$ und $lU.e$ gilt $b'\, b \supset e$, woraus $b\, b' \supset e$ folgt. Nach E besteht $a\, b' = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$. Wir bilden nun das Schema



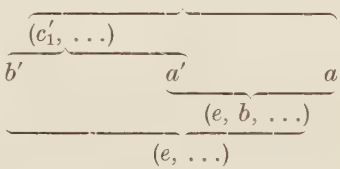
Nach A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h\, b \supset b$ erfüllt. Nach $li(U)$ gilt dann $e_h = e$, woraus $a\, b' \supset e$ folgt. Nach $lU.e$ gilt dann $b = a$.

Wir beweisen auch, dass $e\,a$ eindeutig gleich a ist. Wie nehmen an, dass die Verknüpfungen $e\,a = (a, b, \ldots)$, $b\,b' \supset e$ und $a\,b' = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$ bestehen und bilden das Schema



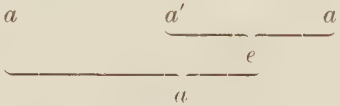
Nach E und A gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $e\,e_k \supset e$ erfüllt. Nach $rU.e$ gilt dann $e_k = e$, woraus $a\,b' \supset e$ folgt. Nach $lU.e$ gilt auch $b = a$. Dann existiert das eindeutige Produkt $e\,a = a$.

Wir wollen nun beweisen, dass wenn $a'\,a \supset e$ besteht, eindeutig $a'\,a = e$ gilt. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass $a'\,a = (e, b, \ldots)$ besteht. Dann gilt auch $b'\,b \supset e$ und $b'\,a' = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_h, \ldots)$, und wir bilden das Schema



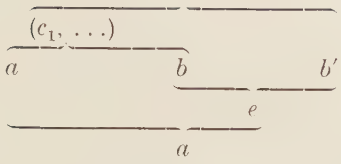
Nach A und E gibt es unter den Elementen $c'_1, c'_2, \ldots$ ein Element c'_h, das die Verknüpfung $c'_h\,a \supset e$ erfüllt. Nach $lU.e$ gilt $c'_h = a'$, woraus $b'\,a' \supset a'$ folgt. Nach $li(U)$ gilt dann $b' = e$. Hieraus folgt $e\,b \supset e$, woraus $b = e$, w. z. b. w.

Nun ist es leicht zu beweisen, dass $a\,a'$ eindeutig gleich e ist. Denn wäre $a\,a' = (e, b, \ldots)$, wäre es möglich, das folgende Schema aufzustellen.

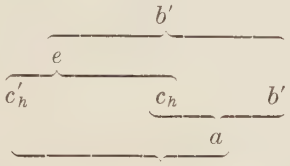


Nach A und E gilt $b\,a = a$, und aus $li(U)$ folgt $b = e$.

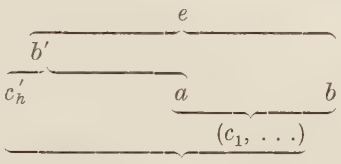
Wenn a und b zwei beliebige Elemente der Menge sind, wollen wir schliesslich beweisen, dass ihr Produkt eindeutig ist. Wenn $a\,b = (c_1, c_2, \ldots, c_h, \ldots, c_k, \ldots)$, $c'_h\,c_h = e$, $b'\,b = e$ und $b\,b' = e$ bestehen, können wir das folgende Schema bilden.



Nach A und E erfüllt jedes von den Elementen $c_1, c_2, \ldots$, z. B. das Element c_h, die Verknüpfung $c_h\, b' = a$. Ferner bilden wir



Dann folgt $c'_h\, a \cdot b'$. Schliesslich erhalten wir

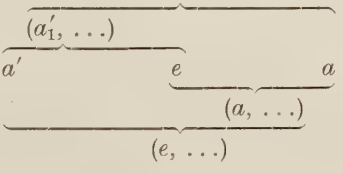


Nach A und E besteht für jedes der Elemente $c_1, c_2, \ldots$ die Verknüpfung $c'_h\, c_k = e$. Aus $rU.e$ folgt $c_k = c_h = \ldots = c_1$. Damit ist gezeigt, dass das Axiom U besteht.

Hiermit haben wir bewiesen, dass die gegebenen Axiome eine Gruppe definieren.

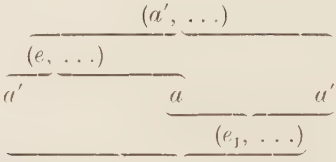
Definition 2. *Die Axiome A, E, $lE.lI$, $lU.lI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.lI$ und $lU.lI$. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt $a'\, a \supset e$ wegen $lE.lI$ und $lU.lI$, und nach E besteht $a'\, e = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



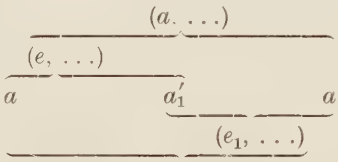
Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a'_1, a'_2, \ldots$ ein Element a'_h, das $a'_h\, a \supset e$ erfüllt. Aus $lU.lI$ folgt $a'_h = a'$, und dann gilt $a'\, e \supset a'$.

Nach E gilt $a\,a' = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$, und wir bilden das Schema



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $a'\,e_k \supset a'$ erfüllt. Nach $ri(U)$ gilt $e_k = e$, woraus $a\,a' \supset e$ folgt. Das Element e hat also die Eigenschaft $rE.lI$, und wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft $rE.e$.

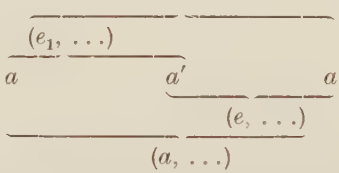
Schliesslich werden wir beweisen, dass e auch die Eigenschaft $rU.e$ hat. Sonst bestände $a\,a_1' \supset e$ wegen $rE.e$ und $a_1'\,a = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$ wegen E. Dann wäre es möglich, das folgende Schema zu bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $a\,e_k \supset a$ erfüllt. Aus $ri(U)$ folgt dann $e_k = e$, und aus $lU.e$ folgt $a_1' = a'$. Also besteht das Axiom $rU.e$, und hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

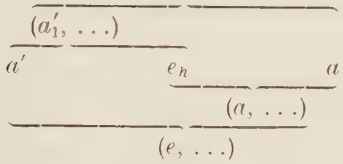
Definition 3. *Die Axiome A, E, $lE.rI$, $lU.rI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.rI$ und $lU.rI$. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht $a'\,a \supset e$ wegen $lE.rI$ und $lU.rI$, und $a\,a' = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$ wegen E. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h\,a \supset a$ erfüllt.

Nach E gilt $a'\,e_h = (a_1', a_2', \ldots, a_h', \ldots)$, und wir bilden das folgende Schema.

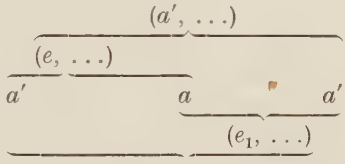


Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a'_1, a'_2, \ldots$ ein Element a'_h, das $a'_h\, a \supset e$ erfüllt. Nach $lU.rI$ gilt dann $a'_h = a'$, woraus $a'\, e_h \supset a'$ folgt. Wegen $ri(U)$ gilt $e_h = e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.rI$ hat. Wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft $lI(E)$, womit diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt ist.

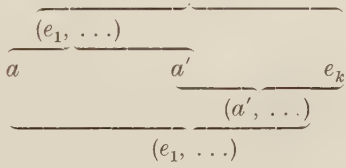
Definition 4. *Die Axiome A, E, $lE.li$, $lU.li$, $li(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.li$ und $lU.li$, das wegen Hilfssatz 2 auch die Eigenschaft $I(E)$ hat.

Wenn a ein beliebiges Element ist, gilt $a'\, a \supset e$, und aus Hilfssatz 1 folgt $e\, a' \supset a'$. Nach E gilt $a\, a' = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots, e_k, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $a'\, e_k \supset a'$ erfüllt. Wir bilden auch



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_h, das $e_h\, e_k \supset e_k$ erfüllt. Es ist zu bemerken, dass e_h und e_k identisch sein können, aber davon wissen wir nichts.

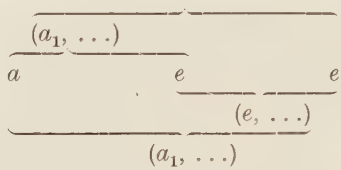
Nach Hilfssatz 2 hat das Element e_h die Eigenschaft $I(E)$. Aus $I(U)$ folgt $e_h = e$ und $a\, a' \supset e$. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rE.I$ hat.

Wegen Hilfssatz 5 hat das Element e auch die Eigenschaft e, und hiermit ist diese Definition auf Definition 3 zurückgeführt.

Definition 5. *Die Axiome A, E, lU, lE.i und rI(U) definieren eine Gruppe.*

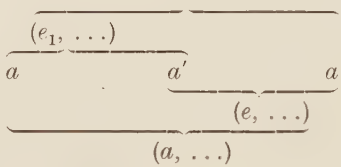
Beweis: Nach Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaft $lE.I$ hat.

Nach E gilt $ae = (a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots, a_j, \ldots)$, wo a ein beliebiges Element der Menge ist. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ zwei Elemente a_h und a_j, die $a_h e \supset a_j$ erfüllen. Aus lU folgt $a_h = a$. Dann besteht $ae \supset a$, womit bewiesen ist, dass das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat.

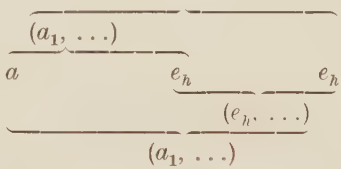
Zufolge $lE.rI$ und lU besteht $a'a \supset e$, und nach E gilt $aa' = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein e_h, das die Verknüpfung $e_h a \supset a$ erfüllt.

Wegen Hilfssatz 2 hat e_h die Eigenschaft $I(E)$.

Nach E gilt $ae_h = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots)$, und wir können das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ zwei Elemente a_i und a_k, die $a_i e_h \supset a_k$ erfüllen. Aus lU folgt $a_i = a$. Dann besteht $ae_h \supset a$, und e_h hat die Eigenschaft $rI(E)$.

Aus $rI(U)$ folgt $e_h \quad e$. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rE.rI$ hat. Wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft $lE.lI$, womit die Definition auf Definition 1 zurückgeführt ist.

Definition 6. *Die Axiome A, E, lE.ri, lU.ri, ri(U) und I(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften *lE.ri* und *lU.ri* hat. Wegen Hilfssatz 2 hat das Element e auch die Eigenschaft $I(E)$.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt $a'a \supset e$ wegen *lE.I* und *lU.I*, und wegen Hilfssatz 1 gilt $e\,a' \supset a'$. Nach E besteht $aa' = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$, und wir können das folgende Schema bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & (a', \ldots) & & \\ & (e, \ldots) & & & \\ a' & & a & & a' \\ & & & (e_1, \ldots) & \end{array}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein e_k, das $a'e_k \supset a'$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 2 hat e_k die Eigenschaft $I(E)$, und aus $I(U)$ folgt $e_k = e$. Dann gilt $aa' \supset e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.I$ hat. Wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft e, und hiermit ist diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt.

Definition 7. *Die Axiome A, E, lE.li, lU.li, ri(U) und I(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften *lE.li* und *lU.li*. Wegen Hilfssatz 4 hat es auch die Eigenschaft $ri(E)$, womit die Definition auf Definition 6 zurückgeführt ist.

Definition 8. *Die Axiome A, E, lE.i, lU und rE.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d mit den Eigenschaften *lE.i* und *rE.i*, zu welchem man wegen Hilfssatz 3 ein Element e mit der Eigenschaft *lE.I* bestimmen kann, das $ed = d$ erfüllt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt wegen *rE.i* $af_1' \supset d$, und nach E existiert $ea = (a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots)$. Wir bilden nun das folgende Schema.

$$\begin{array}{ccccc} & & (a_1, \ldots) & & \\ e & & a & & f_1' \\ & & & (d, \ldots) & \\ & & (d, \ldots) & & \end{array}$$

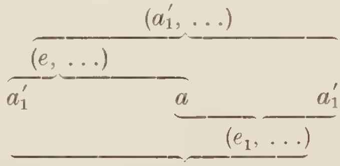
Wegen A und E gibt es unter den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ ein a_h, das $a_h f_1' \supset d$ erfüllt. Wegen lU gilt dann $a_h = a$, woraus folgt, dass das Element e die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 9. *Die Axiome A, E, $lE.i$, $lU.i$ und rU definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaft $lE.I$ hat. Wegen Hilfssatz 5 hat es auch die Eigenschaft $lE.e$.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt $a_1' a \supset e$ wegen $lE.e$, und nach E existiert $aa_1' = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

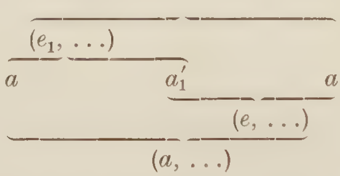


Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein Element e_k, das $a_1' e_k \supset a_1'$ erfüllt. Aus rU folgt $e_k = e$ und $aa_1' \supset e$. Das Element e hat also die Eigenschaft $rE.e$. Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 10. *Die Axiome A, E, $lE.li$, $rU.li$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften $lE.li$ und $rU.li$ hat. Wegen Hilfssatz 2 hat das Element e auch die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 5 hat es sogar die Eigenschaften $lE.e$ und $rU.e$.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen $lE.e$ $a_1' a \supset e$, und nach E existiert $aa_1' = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein e_h, das die Verknüpfung $e_h a \supset a$ erfüllt. Aus $li(U)$ folgt dann $e_h = e$. Dann besteht $aa_1' \supset e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.e$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt.

Definition 11. *Die Axiome A, E, lE.i, rU und li(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lE.I$, womit die Definition auf Definition 10 zurückgeführt ist.

Definition 12. *Die Axiome A, E, lE.ri, rU.ri und ri(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $rU.ri$. Wegen Hilfssatz 2 hat das Element e die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 5 hat es sogar die Eigenschaften $lE.e$ und $rU.e$.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen $lE.e$ $a_1' a \supset e$, und nach E existiert $a a_1' = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\overbrace{\underbrace{a_1'}\quad\underbrace{a}\quad\underbrace{a_1'}}^{(a_1', \ldots)}$$
$$\overbrace{\underbrace{a_1'}\quad\underbrace{a}}^{(e, \ldots)}\quad\underbrace{a_1'}$$
$$\underbrace{\underbrace{a_1'}\quad\underbrace{a}\quad\underbrace{a_1'}}_{(e_1, \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$ ein e_k, das $a_1' e_k \supset a_1'$ erfüllt. Aus $ri(U)$ folgt $e_k = e$. Dann besteht $a a_1' \supset e$, und das Element e hat sogar die Eigenschaft $rE.e$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 13. *Die Axiome A, E, lU, lE.i, rε.i und rv.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge zwei Elemente c und d, zu welchen man genau ein h' bestimmen kann, das die Verknüpfung $ch' \supset d$ erfüllt.

Wenn es in der Menge zwei Elemente e und e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, wäre es möglich, wegen E die Produkte

$$eh' = (h_1', h_2', \ldots, h_k', \ldots) \quad \text{und}$$
$$e_a h' = (h_{a_1}', h_{a_2}', \ldots, h_{a_k}', \ldots)$$

und die folgenden Schemata zu bilden.

$$\overbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e}\quad\underbrace{h'}}^{(d, \ldots)}\qquad\overbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e}}^{(c, \ldots)}$$
$$\underbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e}\quad\underbrace{h'}}_{(h_1', \ldots)},$$

$$\overbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e_a}\quad\underbrace{h'}}^{(d, \ldots)}\qquad\overbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e_a}}^{(c, \ldots)}$$
$$\underbrace{\underbrace{c}\quad\underbrace{e_a}\quad\underbrace{h'}}_{(h_{a_1}', \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $h'_1, h'_2, \ldots$ ein h'_k, das $ch'_k \supset d$ erfüllt, und unter den Elementen $h'_{a_1}, h'_{a_2}, \ldots$ ein h'_{a_k}, das $ch'_{a_k} \supset d$ erfüllt. Wegen *rv.i* besteht $h'_k = h'$ und $h'_{a_k} = h'$, woraus $eh' \supset h'$ und $e_a h' \supset h'$ folgt. Aus *lU* folgt dann $e_a = e$, womit bewiesen ist, dass das Axiom $rI(U)$ besteht.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 14. *Die Axiome A, E, lE.ri, lU.ri, rε.ri, rv.ri, li(U) und I(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 hat ein Element mit den Eigenschaften *lE.ri, lU.ri, rε.ri* und *rv.ri* auch die Eigenschaft $li(E)$, womit die Definition auf Definition 4 zurückgeführt ist.

Definition 15. *Die Axiome A, E, lE, rU und lv.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d mit der Eigenschaft *lv.i*. Dann gibt es auch ein c, zu welchem man wegen *lE* und *lv.i* genau ein g' bestimmen kann, das die Verknüpfung $g'c \supset d$ erfüllt. Wegen *lE* gilt $ec \supset c$ für mindestens ein Element e, und nach E gilt $g'e = (g'_1, g'_2, \ldots, g'_h, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\overbrace{\underbrace{g'}_{(g'_1, \ldots)} \quad \underbrace{e \quad c}_{(c, \ldots)}}^{(d, \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $g'_1, g'_2, \ldots$ ein g'_h, das $g'_h c \supset d$ erfüllt. Wegen *lv.i* gilt dann $g'_h = g'$, woraus $g'e \supset g'$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $ri(E)$ hat, und hiermit ist diese Definition auf Definition 12 zurückgeführt.

Definition 16. *Die Axiome A, E, lE, rU und rε.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge bestehen $ec \supset c$ und $cc' \supset e$, und wegen E gilt $cc' = (e, e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots)$. Wir bilden

$$\overbrace{\underbrace{e}_{(c, \ldots)} \quad \underbrace{c \quad c'}_{(e, \ldots)}}^{(e, \ldots)}$$

Wegen A und E gibt es unter den Elementen $e, e_1, e_2, \ldots$ ein e_k, das $ee_k \supset e$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 2 hat e_k die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 12 zurückgeführt ist.

Definition 17. *Die Axiome A, E, lE.ri, rU.ri, rε.ri und li(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn e ein Element mit den Eigenschaften *lE.ri*, *rU.ri* und *rε.ri* ist, hat e wegen Hilfssatz 4 auch die Eigenschaft $li(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 10 zurückgeführt.

Definition 18. *Die Axiome A, E, lE.li, rU.li, lv.li und ri(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn e ein Element mit den Eigenschaften *lE.li*, *rU.li* und *lv.li* ist, hat e wegen Hilfssatz 4 auch die Eigenschaft $ri(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 12 zurückgeführt.

ABSCHNITT IV

Die Irreduzibilität der Definitionen.

14. *Einleitung.*

In diesem Abschnitt wollen wir die Irreduzibilität der in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Gruppendefinitionen untersuchen. Zuerst wollen wir zehn Axiomensysteme aufstellen, aus welchen nicht alle übrigen Axiome hergeleitet werden können. Es zeigt sich, dass wir auch unentschiedene Systeme erhalten. Dann werden wir die Irreduzibilität der Definitionen untersuchen.

Schliesslich werden wir zeigen, dass wenn ein Axiomensystem gegeben ist, das nur solche Axiome enthält, die von früheren Verfassern behandelt sind, es immer möglich ist zu bestimmen, ob das System eine Gruppe definiert oder nicht.

15. *Sätze.*

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Axiomensysteme keine Gruppe definieren.

1) $A, E, U, lU, rU, l\varepsilon.e, r\varepsilon.e, li(U), ri(U), I(U)$
2) $A, E, U, lU, rU, li(U), ri(U), I(U)$
3) $A, E, U, lE.I, rE.I, lv.I, rv.I, li(U), ri(U), I(U)$
4) $A, E, lE, U, lU, r\varepsilon.rI, li(U)$
5) $A, E, lE, U, lU, rv.rI, li(U)$
6) $A, E, U, lE.I, lU.I, lI(U), rI(U)$
7) $A, E, lE, U, rU, r\varepsilon.i, lI(U), ri(U), I(U)$
8) $A, lE, U, lU, rU, r\varepsilon.li, li(U), ri(U), I(U)$
9) $A, E, lE, rE, lU.e, rU.e, I(U)$
10) $A, E, lE, rE, lU.i, rU.i, lv.e, rv.e, li(U), ri(U), I(U)$

Satz 1. *Die Axiome $A, E, U, lU, rU, l\varepsilon.e$ und $r\varepsilon.e$ definieren keine Gruppe.*

Beweis: Wenn die Menge alle positiven ganzen Zahlen umfasst und die Komposition die Multiplikation ist, bestehen die gegebenen Axiome, aber nicht z. B. lE.

Satz 2. *Die Axiome A, E, U, lU und rU definieren keine Gruppe.*

Beweis: Wenn die Menge alle positiven ganzen Zahlen ausser Eins umfasst und die Komposition die Multiplikation ist, bestehen die gegebenen Axiome, aber nicht z. B. e.

Satz 3. *Die Axiome A, E, U, lE.I, rE.I, lv.I, rv.I, li(U), ri(U) und I(U) definieren keine Gruppe.*

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. *lE*.

1	2	2
2	1	1
2	1	1

Satz 4. *Die Axiome A, E, lE, U, lU und rε.rI definieren keine Gruppe.*

Satz 5. *Die Axiome A, E, lE, U, lU und rv.rI definieren keine Gruppe.*[1]

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. *rI(U)*. Wir bemerken, dass die Axiome *rε.rI* und *rv.rI* für *verschiedene* Elemente bestehen.

1	1
2	2

Satz 6. *Die Axiome A, E. U, lE.I, lU.I, lI(U) und rI(U) definieren keine Gruppe.*

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. *li(U)*.

1	1	1
2	2	2
2	2	2

Satz 7. *Die Axiome A, E, lE, U, rU, rε.i, lI(U), ri(U) und I(U) definieren keine Gruppe.*[2]

Beweis: Wir führen den Beweis von Baer und Levi an.

Es sei B eine abzählbar unendliche Menge. B' durchlaufe die sämtlichen echten unendlichen Teilmengen von B, für die das Komplement $B - B'$ unendlich ist. β durchlaufe die ein-eindeutigen Abbildungen $B' \to B$. Sind nun $\beta_1 : B_1' \to B$ und $\beta_2 : B_2' \to B$ zwei derartige Abbildungen, so gibt es eine bestimmte echte Teilmenge B_{12}' von B_1', die durch β_1 auf B_2' und mithin durch $\beta_1\beta_2$ auf B abgebildet wird. Da $B - B_{12}'$ unendlich ist, gehört $\beta_1\beta_2$ zur Klasse der Abbildungen β. Diese Komposition der β ist nicht nur assoziativ und genau eindeutig definiert (also bestehen die Axiome *A*, *E* und *U*), sondern es sind auch *lE* und *rU* erfüllt. Es seien nämlich

$$\beta_2 : B_2' \to B, \quad \beta_{12} : B_{12}' \to B$$

---

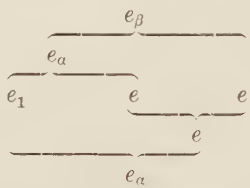
[1] Vgl. Lorenzen, S. 319.

[2] Baer-Levi S. 7, Lorenzen S. 320.

vorgegebene Abbildungen β. Mit A_{12} bzw. A_2 bezeichne man die Originale der Elemente A von B bezüglich β_{12} bzw. β_2. Ferner wähle man B_1' so, dass $B_{12}' \subset B_1' \subset B$ und $B_1' - B_{12}'$, $B - B_1'$ beide unendlich sind. Dann genügt jede ein-eindeutige Abbildung $\beta_1 : B_1' \to B$, durch die $A_{12} \to A_2$, $B_1' - B_{12}' \to B - B_2'$ abgebildet wird, der Bedingung $\beta_1 \beta_2 = \beta_{12}$. Sind andererseits β_1 und β_{12} gegeben, so kann es ein zugehöriges β_2 nur dann geben, wenn $B_{12}' \to B'$ ist. Bezeichnet man jetzt wieder das Original von A bezüglich β_{12} mit A_{12} und weiterhin das Bild von A_{12} bezüglich β_1 mit A_2, so muss A_2 das Original des (in B willkürlichen) Elementes A bezüglich β_2 sein. β_2 ist also durch β_{12} und β_1 höchstens eindeutig bestimmt. Für die β gelten also auch die Axiome lE und rU. Es ist aber rE nicht erfüllt.

Weil das Axiom rU besteht, besteht auch das Axiom $ri(U)$, und weil die Axiome A, lE und U bestehen, bestände wegen Hilfssatz 14 im Abschnitt II auch das Axiom $lI(U)$. Wegen lE besteht $r\varepsilon.i$.

Wenn das Axiom $I(U)$ nicht bestände, gäbe es in der Menge zwei Elemente e und e_a, die die Eigenschaft $I(E)$ hätten. Wegen lE gälte dann $e_1 e = e_a$, und wir könnten das folgende Schema bilden.



Aus A und U folgt $e_\beta = e_a$, $e_a e = e_a$. Aus rU folgt $e_a = e$, und folglich besteht das Axiom $I(U)$.

Satz 8. *Die Axiome A, lE, U, lU, rU, $r\varepsilon.li$* und *$I(U)$ definieren keine Gruppe.*

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. E.

	1	2	3	4	5	...
1	–	2	–	–	–	
2	–	–	1	–	–	
3	1	–	–	–	–	
4	–	1	–	–	–	
5	2	–	–	–		
6	–	3	–	–		
7	–	–	2	–	–	
8	3	–	–	–	–	

9		4			
10	–	–	3	–	
11				1	
12	4				
13	–	5	–		
14		–	4		
15				2	
16	–	–			1
17	5		–		

. . . . . .

Satz 9. *Die Axiome A, E, lE, rE, lU.e, rU.e und I(U) definieren keine Gruppe.*

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. *U*.

1	2	3
2	1	3
3	3	(1.2)

Satz 10. *Die Axiome A, E, lE, rE, lU.i, rU.i, lv.e, rv.e, li(U), ri(U) und I(U) definieren keine Gruppe.*

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht z. B. *U*.

1	2	3	4
2	(1,3)	4	(1,3)
3	4	1	2
4	(1,3)	2	(1,3)

16. *Unentschiedene Systeme. Die Irreduzibilität der Definitionen.*

Unter allen denjenigen Systemen, die aus den im Abschnitt I aufgestellten Axiomen gebildet werden können, gibt es einige Systeme, die weder nach einer der im Abschnitt II und III hergeleiteten Definitionen eine Gruppe definieren noch nach einem der in diesem Abschnitt aufgestellten Sätze keine Gruppe definieren. Es ist dem Verfasser noch nicht gelungen, diese Systeme auf eine von diesen zwei Gattungen zurückzuführen. Möglicherweise gibt es unendliche Mengen, die diesen Systemen entsprechen. In dieser Arbeit werden sie *unentschiedene Systeme* genannt.

Die unentschiedenen Systeme sind wie folgt.

1) *A, E, U, lU, rE.i, lε.i, rv.i, I(U)*
2) *A, E, U, lE.I, lU.I, rε.I, rv.I, li(U), rI(U)*

3) A, E, lE, U, $lv.i$, $r\varepsilon.i$, $rv.i$
4) A, E, lE, $lU.I$, $r\varepsilon.I$, $rv.I$, $li(U)$, $ri(U)$
5) A, E, lE, $lU.rI$, $r\varepsilon.rI$, $rv.rI$, $li(U)$, $rI(U)$
6) A, E, $lE.li$, rU, $r\varepsilon.li$
7) A, E, lE, $lU.ri$, $rU.ri$, $li(U)$, $I(U)$
8) A, E, lE, rE, $lU.ri$, $li(U)$, $I(U)$

Wir betrachten eine Definition aus einem der Abschnitte II und III. Wenn eines der in der Definition enthaltenen Axiome durch ein weniger umfassendes Axiom ersetzt wird, erhalten wir ein System, das nach den hergeleiteten Definitionen keine Gruppe definieren kann. In gewissen Fällen ist es möglich zu beweisen, dass das erhaltene System nach einem der Sätze dieses Abschnitts keine Gruppe definiert. In anderen Fällen erhält man ein System, das ein unentschiedener Fall ist.

Wenn alle diejenigen Systeme, die aus einer gewissen Definition durch Ersetzung jedes der Axiome der Reihe nach mit einem weniger umfassenden Axiome hervorgehen, wegen eines der Sätze keine Gruppe definieren, sagen wir, dass die Definition *irreduzibel* ist.

Wenn eine Definition nicht irreduzibel ist, gibt es unter den Systemen mindestens ein System, das ein unentschiedener Fall ist.

Diejenigen Axiomensysteme, die aus einer gegebenen Definition hervorgehen, bestimmen wir in folgender Weise.

Die Axiome A, E, U, $l\varepsilon.i$, $lv.i$ und $lI(U)$ werden der Reihe nach ausgeschlossen.

lE wird durch $lE.li$, oder, wenn die Definition auch das Axiom J enthält, durch $lE.J$ ersetzt.

lU wird durch $lU.i$, $li(U)$, oder, wenn die Definition auch das Axiom J enthält, durch $lU.J$, $li(U)$ ersetzt.

$lE.lI$ wird erstens durch $l\varepsilon.lI$, zweitens durch $lE.I$ ersetzt.

$lU.lI$ wird erstens durch $lv.lI$, $lI(U)$, zweitens durch $lU.I$ ersetzt.

$lU.I$ wird erstens durch $lv.I$, $lI(U)$, zweitens durch $lU.li$, drittens durch $lU.ri$ ersetzt.

$li(U)$ wird durch $lI(U)$ ersetzt.

$I(U)$ wird durch $lI(U)$, $rI(U)$ ersetzt.

Wenn wir eine Definition betrachten, die mehrere Inversaxiome enthält, haben wir ja vorausgesetzt, dass es in der Menge ein Element gibt, dass alle diese Inversaxiome als Eigenschaften hat. Wenn wir weniger umfassende Systeme bilden, werden wir das in allen Inversaxiomen enthaltene Eins-Existenzaxiom auf einmal austauschen. Sonst erhielten wir ja Systeme, die mehrere Einselemente mit verschiedenen Eigenschaf-

ten enthielten, aber solche Systeme werden wir in dieser Arbeit nicht in Betracht ziehen.

Als Beispiel werden wir Definition 20 im Abschnitt II wählen. Sie umfasst die Axiome A, E, U, $lE.li$, $rU.li$ und $re.li$.

System, das aus der Definition hervorgeht	Auf Grund dieses Satzes definiert das System keine Gruppe
A, U, $lE.li$, $rU.li$, $re.li$	Satz 8
A, E, $lE.li$, $rU.li$, $re.li$	» 9
A, E, U, $le.li$, $rU.li$, $re.li$	» 1
A, E, U, $lE.li$, $rv.li$, $re.li$, $rI(U)$.....	» 3
A, E, U, $lE.li$, $rU.li$	» 7
A, E, U, $lE.li$, $rU.li$, $re.li$	» 7

Folglich ist die Definition *irreduzibel*.

Im Abschnitt I wurde bewiesen, dass jede Definition das Axiom A und eines der Axiome E, lE und rE enthalten muss.

Wenn wir sämtliche Definitionen untersuchen, werden wir finden, dass die Definitionen 1–5, 7–18 und 20 im Abschnitt II und 1, 5, 8, 10–13 und 18 im Abschnitt III irreduzibel sind. Aus jeder der übrigen Definitionen können wir mindestens ein System herleiten, das ein unentschiedener Fall ist.

Wir teilen nun eine Tafel der nicht irreduziblen Definitionen mit. Es ist zu bemerken, dass aus einigen Definitionen mehrere unentschiedene Systeme hervorgehen.

Definition	Hieraus geht ein System hervor, das in folgendem unentschiedenen System enthalten ist
II Def. 6, 21.....	1)
II » 19	2) 3)
III » 2, 3, 6, 7	4)
III » 4	5)
III » 9, 15.....	1)
III » 14	6) 7) 8)
III » 16	6)
III » 17	7)

17. *Systeme, die spezielle Inversaxiome und Eins-Unitätsaxiome nicht enthalten.*

Wenn wir uns mit den in dieser Arbeit aufgestellten Axiomen nicht beschäftigen, sondern nur diejenigen Axiome betrachten, die von früheren

Verfassern benutzt worden sind, ist es immer möglich zu bestimmen, wann ein Axiomensystem eine Gruppe definiert oder nicht. Dieses hat Lorenzen für solche Systeme gezeigt, die höchstens vier Axiome enthalten.

Zuerst werden wir alle irreduziblen Definitionen aufstellen, die aus allgemeinen Axiomen, Eins-Existenzaxiomen und allgemeinen Inversaxiomen gebildet worden sind.

Aus den früher hergeleiteten Definitionen leuchtet unmittelbar ein, dass wir, wenn wir die speziellen Inversaxiome und die Eins-Unitätsaxiome durch umfassendere Axiome ersetzen, die folgenden Definitionen erhalten.[1]

1) $A, E, U, lE.lI$
2) A, lE, U, lI
3) $A, lE, U, rE.i$
4) $A, lE, U, rU.ri$
5) $A, E, U, lE.ri, rU.li$
6) $A, E, U, lE.i, lU.i, rU.i$
7) $A, E, U, lE.i, lU.i, rE.i$
8) $A, E, lU, lE.lI$
9) $A, E, lU, rE.li$
10) $A, E, lU, lE.i, rU.i$
11) $A, E, lU, lE.i, rE.i$
12) $A, E, lE.i, lU.i, rU$

Wenn wir alle diejenigen Systeme untersuchen, die aus einer der Definitionen der Abschnitte II und III und aus einem der unentschiedenen Systeme dieses Abschnitts gebildet worden sind, wenn die speziellen Inversaxiome und die Eins-Unitätsaxiome entweder weggelassen worden sind oder $lv.i$ durch $lU.i$, $l\varepsilon.i$ durch $lE.i$, $li(U)$ durch lU, $lI(U)$ durch $lU.i$ ersetzt worden ist, werden wir finden, dass ein solches System entweder wegen eines Satzes keine Gruppe definiert oder wegen einer der eben aufgestellten Definitionen eine Gruppendefinition ist. Dann folgt auch, dass diese Definitionen irreduzibel sind.

[1] Die Definitionen 1—4, 8 und 9 kommen in der Arbeit Lorenzens vor. Die Irreduzibilität dieser Definitionen ist von ihm bewiesen.

ABSCHNITT V

Definitionen, die das Axiom *UA* enthalten.

18. *Einleitung.*

Im Abschnitt I wurde das assoziative Gesetz so formuliert, dass es keine Existenzbedingungen und Unitätsbedingungen enthielt. Es ist aber möglich, das Gesetz in solcher Weise zu formulieren, dass es gewisse Existenzbedingungen und Unitätsbedingungen enthält.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Formulierung des assoziativen Gesetzes betrachten, die eine Unitätsbedingung enthält. Sie ist von Huntington[1] aufgestellt, und wir wollen sie mit *UA* bezeichnen. Dieses Axiom ist auch von Lorenzen[2] behandelt worden.

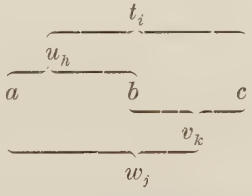
Zunächst werden wir das Axiom aufstellen, und wir werden zeigen, dass das Axiom *U* nicht aus *UA* folgt. Dann wollen wir einige Hilfssätze beweisen. Schliesslich werden wir zeigen, dass es möglich ist, in allen Gruppendefinitionen des Abschnitts II die Axiome *A* und *U* durch *UA* zu ersetzen.

19. *Aufstellung des Axioms UA.*

Wir betrachten eine nichtleere Menge, für welche wir die Existenz des Axioms *U* nicht voraussetzen, und wir nehmen an, dass a, b und c drei Elemente der Menge sind.

Als wir das Axiom *A* aufstellten, nahmen wir an, dass wir zu drei Elementen a, b und c sämtliche Elemente der Produkte u, t, v und w bestimmen könnten, und dann folgte aus *A*, dass die Produkte t und w dieselben Elemente enthielten.

Wenn wir nun das Axiom *UA* aufstellen wollen, nehmen wir an, dass wir *mindestens* ein Element aus jedem der Produkte u, t, v und w bestimmen können. Dann bestehen die Verknüpfungen $ab \supset u_h$, $u_h c \supset t_i$, $bc \supset v_k$ und $a v_k \supset w_j$. Setzen wir diese Elemente ins Schema ein, erhalten wir



[1] Trans. Amer. Math. Soc. *4* (1903), S. 27—30.

[2] S. 322.

Wir können das Axiom A auf dieses Schema nicht beziehen, denn aus A folgt nur, dass die beiden Elemente t_i und w_j zur Menge gehören, die aus sämtlichen Elementen der Produkte $t = w$ gebildet wird. Wir werden nun UA in solcher Weise formulieren, dass $t_i = w_j$ aus UA folgt.

UA: *Wenn zu drei Elementen a, b und c der Menge die Existenz der Produkte u, t, v und w bekannt ist, und wenn die Verknüpfungen $ab \supset u_h$, $u_h c \supset t_i$, $bc \supset v_k$ und $av_k \supset w_j$ bestehen, wo u_h ein Element aus u, t_i ein Element aus t, v_k ein Element aus v und w_j ein Element aus w ist, gilt $t_i = w_j$.*

Wenn auch $av_k \supset w_{j'}$ besteht, wo $w_{j'}$ von w_j verschieden ist, kann man ins Schema das Element w_j durch das Element $w_{j'}$ ersetzen. Dann folgt $t_i = w_{j'}$, woraus $w_{j'} = w_j$ folgt. Es ist leicht einzusehen, das wenn das Axiom UA besteht, die beiden Produkte $(ab)c$ und $a(bc)$ *eindeutig* sind, während die Produkte ab und bc *mehrdeutig* sein können.

Aus UA folgt ja die Existenz des Axioms A. Dagegen gibt es Mengen, in welchen UA aber nicht U besteht. Wir betrachten z. B.

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & (1,2) \end{array}$$

In dieser Menge bestehen die Axiome UA, lU und rU, aber das Axiom U besteht nicht.

20. *Hilfssätze.*

Wir werden nun einige Hilfssätze beweisen, die wir später benutzen wollen.

Hilfssatz 1. *Wenn die Axiome UA und $lI(E)$ bestehen, besteht auch das Axiom U.*

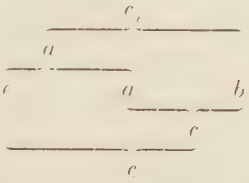
Beweis: Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lI(E)$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen $ee \supset e$ und $ea = (a, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & a_i & & \\ & e & & & \\ e & & e & & a \\ & & & a & \\ & & a & & \end{array}$$

Wegen UA gilt $a_i = a$ für jedes a_i, woraus $ea = a$ folgt.

Wenn das Axiom U nicht gültig wäre, gäbe es zwei Elemente a und

b, deren Produkt mehrdeutig wäre, $ab = (c, c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots)$. Dann besteht



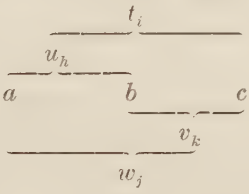
Wegen UA gilt $c_i = c$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Wenn die Axiome UA, E und lU bestehen, besteht auch das Axiom U.*

Beweis: Wir betrachten drei beliebige Elemente der Menge, die wir mit a, b und c bezeichnen. Wegen E existieren die Produkte ab, bc, $(ab)c$ und $a(bc)$, und dann gilt

$$\begin{aligned} ab \quad & (u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots), \\ bc \quad & (v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots), \\ (ab)c \quad & (t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots), \\ a(bc) \quad & (w_1, w_2, \ldots, w_j, \ldots). \end{aligned}$$

Dann können wir das folgende Schema bilden.

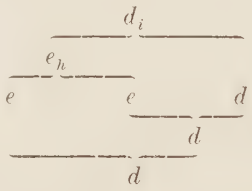


Für alle i und j gelten wegen UA $t_i = w_j = t$. Aus lU geht hervor, dass $u_1 = u_2 = \cdots = u_h = u$. Dann gilt eindeutig $ab = u$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Wenn die Axiome UA, E, $lE.i$ und $lU.i$ bestehen, und wenn d ein Element mit den Eigenschaften $lE.i$ und $lU.i$ ist, gelten die Gleichungen $ed = d$, $ee = e$, $de = e$ und $d'd = e$, wo man die Elemente e und d' aus d bestimmen kann. Ferner hat das Element e die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$.*

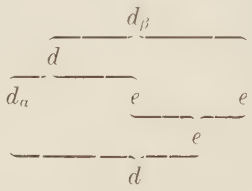
Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d, das die Eigenschaften $lE.i$ und $lU.i$ hat. Dann können wir ein und

nur ein Element e bestimmen, das $ed \supset d$ erfüllt. Wegen E gelten $ee = (e_1, e_2, \ldots, e_h, \ldots)$ und $e_h d = (d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



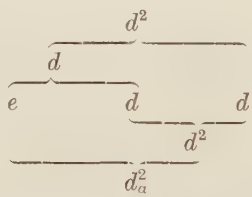
Wegen UA gilt $d_i = d$, und aus $lU.i$ folgt $e_h = e$. Dann bestehen die Gleichungen $ed = d$ und $ee = e$.

Wegen $lE.i$ und $lU.i$ besteht die Verknüpfung $d_\alpha e \supset d$, und nach E gilt $de \supset d_\beta$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

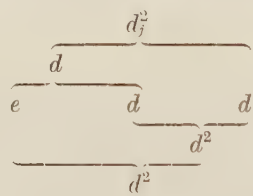


Wegen UA gilt $d_\beta = d$, woraus $de = d$ folgt.

Wegen E gilt $dd = (d^2, d_1^2, d_2^2, \ldots, d_j^2, \ldots)$ und $ed^2 \supset d_\alpha^2$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

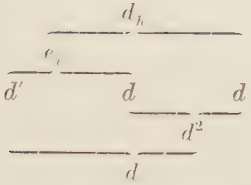


Wegen UA gilt $d_\alpha^2 = d^2$, woraus $ed^2 = d^2$ folgt. Wir bilden auch



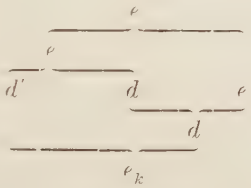
woraus wegen UA die Gleichung $dd = d^2$ folgt.

Wegen $lE.i$ und $lU.i$ gilt $d'd^2 \supset d$, und wegen E gelten $d'd \supset e_i$ und $e_i d \supset d_h$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



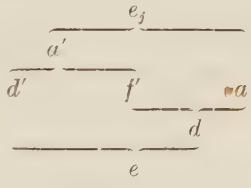
Wegen UA gilt $d_h = d$, und aus $lU.i$ folgt $e_i = e$, woraus $d'd \supset e$.

Wäre $d'd \supset e_k$, wäre es möglich, das folgende Schema zu bilden.



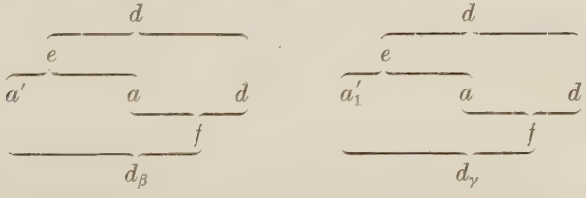
Wegen UA gilt $e_k = e$, woraus die Gleichung $d'd = e$ folgt.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt wegen $lE.i$ und $lU.i$ $f'a \supset d$, und wegen E gelten $d'f' \supset a'$ und $a'a \supset e_j$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen UA gilt $e_j = e$, woraus $a'a = e$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $lE.I$ hat.

Schliesslich wollen wir beweisen, dass e auch die Eigenschaft $lU.I$ hat. Sonst gäbe es ein Element a_1', das $a_1'a \supset e$ erfüllte. Wegen E gelten $ad \supset f$, $a'f \supset d_\beta$ und $a_1'a \supset d_\gamma$. Dann können wir die folgenden Schemata bilden.

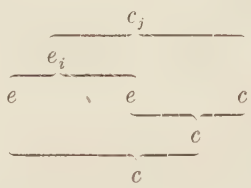


Wegen UA gelten $d_\beta = d$ und $d_\gamma = d$, woraus $a'f \supset d$ und $a_1'f \supset d$. Aus $lU.i$ folgt dann $a_1' = a'$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Dieser Hilfssatz entspricht Hilfssatz 4 im Abschnitt II.

Hilfssatz 4. *Wenn die Axiome UA, E, li(E) und li(U) bestehen, besteht auch das Axiom I(E).*

Beweis: Nach $li(E)$ und $li(U)$ gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man genau ein Element e bestimmen kann, das $ec \supset c$ erfüllt. Nach E bestehen $ee = (e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots)$, $e_i c = (c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots)$ und $ec = (c, \ldots, c_k, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

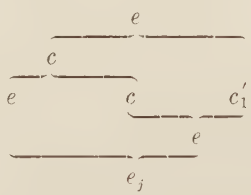


Aus UA folgt $c_j = c$, und dann gilt $e_i c \supset c$. Nach $li(U)$ gilt $e_1 = e_2 = \ldots = e$, woraus $ee = e$ folgt. Dann ist der Hilfssatz bewiesen.

Dieser Hilfssatz entspricht Hilfssatz 6 im Abschnitt II.

Hilfssatz 5. *Wenn die Axiome UA, E und rε.li bestehen, hat ein Element mit der Eigenschaft rε.li sogar die Eigenschaft I(E).*

Beweis: Wegen $r\varepsilon.li$ gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das $ec \supset c$ erfüllt, und mindestens ein Element c_1', das $cc_1' \supset e$ erfüllt. Nach E gilt $ee \supset e_j$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



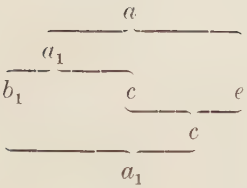
Wegen UA gilt $e_j = e$, woraus $ee = e$ folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Dieser Hilfssatz entspricht Hilfssatz 7 im Abschnitt II.

Hilfssatz 6. *Wenn die Axiome UA, lE und ri(E) bestehen, besteht auch das Axiom U.*[1]

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das $ce \supset c$ erfüllt. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen wegen lE $a_1 e \supset a$ und $b_1 c \supset a_1$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

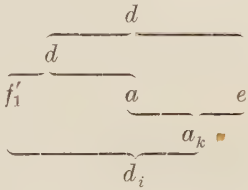
[1] Vgl. Lorenzen, S. 322.



Wegen UA gilt $a_1 = a$, woraus $ae \supset a$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht dann das Axiom U, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 7. *Wenn die Axiome UA, E, $lE.i$ und $rU.i$ bestehen, und wenn $de \supset d$ besteht, wo d das Element mit den Eigenschaften $lE.i$ und $rU.i$ ist, bestehen auch die Axiome $rI(E)$ und U.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d mit den Eigenschaften $lE.i$ und $rU.i$, zu welchem man ein Element e bestimmen kann, das $de \supset d$ erfüllt. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen wegen $lE.i$ und E $f_1' a \supset d$, $ae \supset a_k$ und $f_1' a_k \supset d_i$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen UA gilt $d_i = d$, woraus $f_1' a_k \supset d$ folgt. Wegen $rU.i$ gilt dann $a_k = a$. Dann besteht $ae \supset a$, und hiermit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht dann das Axiom U, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

21. ***Definitionen.***

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Axiomensysteme eine Gruppe definieren. Sie entsprechen den Gruppendefinitionen im Abschnitt II, und die Definitionen mit denselben Nummern sind nur dadurch verschieden, dass die Axiome A und U im Abschnitt II durch das Axiom UA ersetzt sind.

Die Definitionen 1–3 wurden zum erstenmal von Lorenzen[1] hergeleitet. Er leitet auch die Definition UA, lE, $rU.ri$ her, die mehr umfassend als Definition 4 ist.

[1] S. 323.

Definition 1. *Die Axiome UA, E und lE.lI definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome UA und $lI(E)$ bestehen, besteht wegen Hilfssatz 1 auch U. Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 2. *Die Axiome UA, lE und lI(E) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht auch das Axiom U, und hiermit ist diese Definition auf Definition 2 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 3. *Die Axiome UA, lE und rE.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d mit der Eigenschaft $rE.i$, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das $de \supset d$ erfüllt. Weil das Element e die Eigenschaft $ri(E)$ hat, besteht U wegen Hilfssatz 6. Hiermit ist diese Definition auf Definition 3 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 4. *Die Axiome UA, lE, ri(E) und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 6 besteht auch das Axiom U, und hiermit ist diese Definition auf Definition 4 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 5. *Die Axiome UA, E, lE.ri und rU.ri definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $rU.ri$. Wegen Hilfssatz 5 hat das Element e die Eigenschaft $I(E)$. Wegen Hilfssatz 7 besteht U, womit diese Definition auf Definition 5 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 6. *Die Axiome UA, E, lE.i, lU.i und rU.i definieren eine Gruppe.*

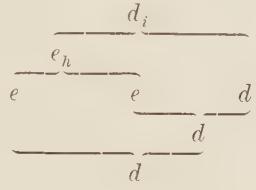
Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d mit den Eigenschaften $lE.i$, $lU.i$ und $rU.i$. Wegen Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e, das $de \supset d$ erfüllt. Wegen Hifssatz 7 besteht dann U, womit diese Definition auf Definition 6 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 7. *Die Axiome UA, E, lE.i, lU.i und rE.i definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d, das die Eigenschaften $lE.i$, $lU.i$ und $rE.i$ hat. Wegen $lE.i$ und $lU.i$ besteht $ed \supset d$, und wegen Hilfssatz 7 besteht dann U. Hiermit ist diese Definition auf Definition 7 im Abschnitt II zurückgeführt.

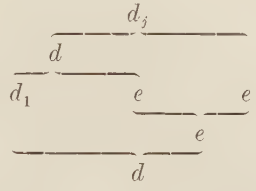
Definition 8. *Die Axiome UA, E, lE.i, rU.i und li(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element d mit den Eigenschaften $lE.i$ und $rU.i$. Wegen $lE.i$ und $li(U)$ gibt es genau ein Element e, das $ed \supset d$ erfüllt. Nach E gilt $ee \supset e_h$ und $e_h d \supset d_i$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen UA gilt $d_i = d$, und aus $li(U)$ folgt dann $e_h = e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $I(E)$ hat.

Wegen $lE.i$ gilt $d_1 e \supset d$, und nach E gilt $de \supset d_j$. Dann folgt



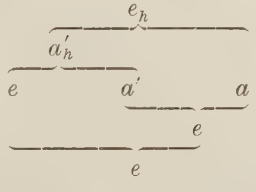
Wegen UA gilt $d_j = d$, woraus $de \supset d$ folgt.

Wegen Hilfssatz 7 besteht dann das Axiom U, womit diese Definition auf Definition 8 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 9. *Die Axiome UA, E, lE.i, lU.i und I(U) definieren eine Gruppe.*

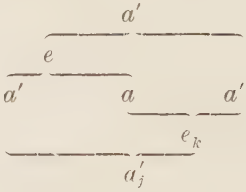
Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ hat.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen $lE.I$ und $lU.I$ $a'a \supset e$, und nach E bestehen $ea' \supset a'_h$ und $a'_h a \supset e_h$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

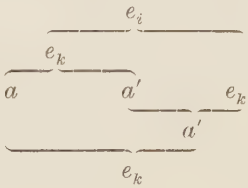


Wegen UA gilt $e_h = e$, woraus $a'_h = a'$ wegen $lU.I$ folgt. Also besteht $ea' \supset a'$.

Nach E bestehen $aa' \supset e_k$ und $a' e_k \supset a'_j$, und wir bilden das folgende Schema.



Wegen UA gilt $a'_j = a'$, woraus $a' e_k \supset a'$ folgt. Nach E besteht $e_k e_k \supset e_i$, und wir erhalten schliesslich das folgende Schema.



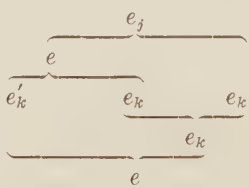
Wegen UA gilt $e_i = e_k$, woraus $e_k e_k \supset e_k$ folgt. Wegen $I(U)$ gilt dann $e_k = e$, womit klar ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.I$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 10. *Die Axiome UA, E, $lE.i$, $lU.i$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$. Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gilt $a' a \supset e$. Wie in der vorigen Definition ist es möglich, $ea' \supset a'$, $aa' \supset e_k$, $a' e_k \supset a'$ und $e_k e_k \supset e_k$ herzuleiten.

Wegen $lE.I$ und $lU.I$ besteht $e'_k e_k \supset e$, und nach E besteht $e e_k \supset e_j$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen UA gilt $e_j = e$, woraus $e e_k \supset e$ folgt. Aus $ri(U)$ folgt dann $e_k = e$. Hiermit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $rE.I$ hat, und hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 11. *Die Axiome UA, E, lE.rI und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome *UA* und $rI(E)$ bestehen, besteht wegen Hilfssatz 1 auch das Axiom *U*.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 11 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 12. *Die Axiome UA, E, lE, li(U) und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen *lE* und $li(U)$ kann man zu jedem Element a der Menge genau ein Element e_a bestimmen, das $e_a a \supset a$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 4 hat jedes e_a die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 6 hat es sogar die Eigenschaft $rI(E)$.

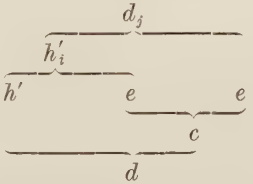
Hiermit ist diese Definition auf Definition 11 zurückgeführt.

Definition 13. *Die Axiome UA, lE, rε.ri und rv.ri definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 6 besteht auch das Axiom *U*, womit die Definition auf Definition 13 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 14. *Die Axiome UA, E, lE, lv.i und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge zwei Elemente c und d, zu welchen man wegen *lE* und *lv.i* genau ein Element h' bestimmen kann, das $h' c \supset d$ erfüllt. Wegen *lE* gilt $e c \supset c$, und nach *E* bestehen $h' e \supset h'_i$ und $h'_i c \supset d_j$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen *UA* gilt $d_j = d$, und aus *lv.i* folgt $h'_i = h'$. Dann besteht $h' e \supset h'$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $ri(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 13 zurückgeführt.

Definition 15. *Die Axiome UA, E, lE, rε.li und rI(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome *UA*, *E* und *rε.li* bestehen, besteht wegen Hilfssatz 5 auch das Axiom $I(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 13 zurückgeführt.

Definition 16. *Die Axiome UA, E, lE, rε.i, rv.i und li(U) definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 gibt es in der Menge ein Element e, das die Eigenschaft $I(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 6 besteht dann U, womit diese Definition auf Definition 16 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 17. *Die Axiome UA, E, lE.rI, rε.rI und rv.rI definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht auch U, womit diese Definition auf Definition 17 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 18. *Die Axiome UA, E, lE, rε.li und rv.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 5 hat ein Element mit der Eigenschaft *rε.li* auch die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 6 besteht das Axiom U. Damit ist die Definition auf Definition 18 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 19. *Die Axiome UA, E, lE, lU.i, rε.i und rv.i definieren eine Gruppe.*

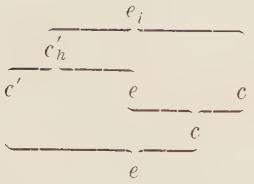
Beweis: Wegen Hilfssatz 3 gibt es ein Element mit der Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 6 besteht dann U. Hiermit ist die Definition auf Definition 19 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 20. *Die Axiome UA, E, lE.li, rU.li und rε.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 5 hat ein Element mit den Eigenschaften *lE.li*, *rU.li* und *rε.li* auch die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 5 zurückgeführt ist.

Definition 21. *Die Axiome UA, E, lE.li, rU.li und lv.li definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen $li(E)$ gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man ein Element e bestimmen kann, dass $ec \supset c$ erfüllt. Wegen *lE.li* und *lv.li* gibt es genau ein c', das $c'c \supset e$ erfüllt. Wegen E bestehen $c'e = (c'_1, c'_2, \ldots, c'_h, \ldots)$ und $c'_h c = (e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots)$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen UA gilt $e_i = e$, und aus $lv.li$ folgt $c'_h = c'$. Dann besteht die Gleichung $c'e = c'$, und das Element e hat die Eigenschaft $ri(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

ABSCHNITT VI

Definitionen, die das Axiom EA_H enthalten.

22. *Einleitung.*

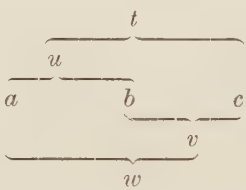
In diesem Abschnitt wollen wir solche Formulierungen des assoziativen Gesetzes betrachten, die Existenzbedingungen enthalten. Zuerst teilen wir zwei Formulierungen mit, die von Lorenzen bzw. Huntington aufgestellt sind. Dann stellen wir eine weitere Formulierung auf, die wir im Abschnitt VII benutzen wollen.

Das Axiom von Huntington wird dazu benutzt, drei Hilfssätze und sechs Gruppendefinitionen herzuleiten. Wir werden auch zeigen, dass man die Irreduzibilität dieser Definitionen auf die Irreduzibilität der Definitionen im Abschnitt II zurückführen kann. Schliesslich werden wir zeigen, dass man EA_{St} statt EA_H benutzen kann.

23. *Aufstellung der Axiome EA_L, EA_H und EA_{St}.*

Wir werden nun das assoziative Gesetz in solcher Weise formulieren, dass es eine Existenzbedingung enthält.

Betrachten wir nun das gewöhnliche Schema.



Lorenzen[1] definiert ein Axiom, das er mit EA bezeichnet. Um dieses Axiom von den anderen eine Existenzaussage enthaltenden Formulierungen des assoziativen Gesetzes zu trennen, werden wir es mit EA_L bezeichnen. Es lautet folgendermassen.

EA_L: *Wenn zu drei Elementen a, b und c der Menge die Existenz der Produkte u und t bzw. v und w bekannt ist, existieren auch die Produkte v und w bzw. u und t, und ausserdem enthalten t und w dieselben Elemente (dasselbe Element).*

Um dieses Axiom verwenden zu können, ist es notwendig, ein Element aus jedem der Produkte u und t (bzw. v und w) zu kennen. Wenn t_i ein

[1] S. 323.

Element aus t ist, folgt aus $EA_L\ bc \supset v_k$ und $av_k \supset t_i$, d.h. die Existenz der zwei fehlenden Produkte.

Das Axiom von Huntington[1] wird in folgender Weise formuliert.

EA_H: *Wir nehmen an, dass zu drei Elementen a, b und c der Menge die Produkte u und v sowie eines der Produkte t und w bekannt sind. Dann existiert auch das andere von den Produkten t und w, und ausserdem enthalten t und w dieselben Elemente (dasselbe Element).*

Um dieses Axiom verwenden zu können, ist es notwendig, ein Element aus jedem der Produkte u und t *und die sämtlichen Elemente des Produktes* v zu kennen. Wenn t_i ein Element aus t ist, gibt es wegen EA_H ein Element v_k aus v, das $av_k \supset t_i$ erfüllt. Denn wenn wir nur ein einziges Element v_h aus v kennen, wissen wir ja, dass v existiert, aber es ist nicht sicher, dass v_h die Verknüpfung $av_h \supset t_i$ erfüllt. Die Existenz eines solchen Elements v_k folgt aus EA_L, aber nicht aus EA_H.

Es ist aber möglich, noch ein Axiom aufzustellen, das weniger umfassend als EA_L ist. In gewissen Fällen können wir dieses Axiom benutzen, wenn nur die Existenz von zwei Produkten des Schemas bekannt ist. Es wird hier mit EA_{St} bezeichnet und in folgender Weise formuliert.

EA_{St}: *Wenn zu drei Elementen a, b und c der Menge die Existenz der Produkte u und t bekannt ist, gilt* $ab \supset u_h$ *und* $u_h c \supset t_i$, *wo* u_h *ein Element aus u und* t_i *ein Element aus t ist. Wenn in der Menge ein oder mehrere Elemente* $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots, v_j, \ldots$ *existieren, die* $av_j \supset t_i$ *erfüllen, gibt es unter diesen Elementen ein* v_h, *das* $bc \supset v_h$ *erfüllt.*

Wenn zu drei Elementen a, b und c der Menge die Existenz der Produkte v und w bekannt ist, gilt $bc \supset v_h$ *und* $av_h \supset w_i$, *wo* v_h *ein Element aus v und* w_i *ein Element aus w ist. Wenn in der Menge ein oder mehrere Elemente* $u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots, u_j, \ldots$ *existieren, die* $u_j c \supset w_i$ *erfüllen, gibt es unter diesen Elementen ein* u_h, *das* $ab \supset u_h$ *erfüllt.*

Wenn es genau ein v_j gibt, das $av_j \supset t_i$ erfüllt, folgt aus $EA_{St}\ bc \supset v_j$. Wenn wir zu keinem Elemente t_i ein v_j bestimmen können, ist es nicht möglich, das Axiom EA_{St} zu benutzen.

Es ist zweckmässig, nur diejenigen Produkte des Schemas auszuschreiben, die man bestimmen kann, ohne die Axiome EA_L, EA_H und EA_{St} zu benutzen. Dadurch erreicht man, dass viel klarer hervorgeht, wie man die übrigen Produkte des Schemas bestimmt hat. Eines dieser unvollständig geschriebenen Schemata wollen wir auch mit dem Wort „Schema" bezeichnen.

---

[1] Trans. Amer. Math. Soc. *6* (1905), S. 181–197.

In denjenigen Fällen, wo wir die Axiome EA_H oder EA_{St} benutzen können, ist es auch möglich, EA_L zu benutzen. Wenn eines dieser drei Axiome besteht, besteht A.

Schliesslich werden wir drei Sätze beweisen.

Satz 1. *Das Axiom E folgt nicht aus den Axiomen* $EA_L, U, lU, rU, lE.i, rE.i, e$ *und* $I(U)$.

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht E.

1	2	3
2	3	–
3	–	–

Satz 2. *Das Axiom E folgt nicht aus den Axiomen* EA_H *oder* $EA_{St}, U, lU, rU, lE.e, rE.e$ *und* $I(U)$.

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht E.

1	2	3
2	1	–
3	–	1

Wenn das Axiom EA_L benutzt wird, folgt aus den gegebenen Axiomen das Axiom E.

Satz 3. *Das Axiom E folgt nicht aus den Axiomen* EA_H, lE, rE, lU, rU, e *und* $I(U)$.

Beweis: In der folgenden Menge bestehen diese Axiome, aber nicht E.

1	2	3
2	(1,3)	–
3	–	(1,2)

Wenn das Axiom EA_{St} benutzt wird, folgt aus den gegebenen Axiomen das Axiom E.

In diesem Abschnitt werden wir zunächst 6 Definitionen herleiten, die das Axiom EA_H enthalten. Dann werden wir zeigen, dass wenn die im Abschnitt II hergeleiteten Definitionen irreduzibel sind, auch die in diesem Abschnitt hergeleiteten Definitionen irreduzibel sind.

24. *Hilfssätze.*

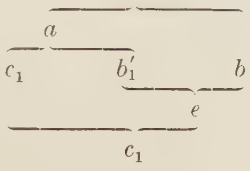
Wir beweisen nun drei Hilfssätze, die wir in diesem Abschnitt benutzen wollen. Der erste Hilfssatz zeigt, dass wenn die Axiome EA_H, lE, U und $ri(E)$ bestehen, es möglich ist, die Existenz des Axioms E herzu-

leiten. Die zwei anderen Hilfssätze sind aufgestellt, um die Herleitung der Definitionen abzukürzen.

Hilfssatz 1. *Wenn die Axiome EA_H, lE, U und $ri(E)$ bestehen, besteht auch das Axiom E.*

Beweis: Wenn die Axiome A, lE, U und $ri(E)$ bestehen, besteht nach Hilfssatz 9 im Abschnitt II auch das Axiom $rI(E)$.

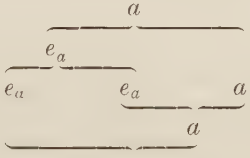
Wenn a und b zwei beliebige Elemente der Menge und e ein Element mit der Eigenschaft $rI(E)$ sind, können wir nach lE $b_1'b = e$ und $c_1b_1' = a$ bilden. Nach $rI(E)$ gilt $c_1e = c_1$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Aus EA_H folgt $ab = c_1$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Wenn die Axiome EA_H, lE, U und $li(U)$ bestehen, besteht auch das Axiom E.*

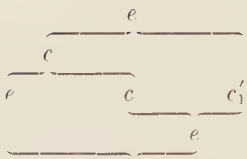
Beweis: Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, kann man zu a genau ein e_a bestimmen, das $e_a a = a$ erfüllt, und zu e_a genau ein e_a bestimmen, das $e_a e_a = e_a$ erfüllt. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Aus EA_H folgt $e_a a = a$, und nach $li(U)$ gilt $e_a = e_a$, woraus $e_a e_a = e_a$ folgt. Wegen Hilfssatz 1 gilt E, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Wenn die Axiome EA_H, U und $r\varepsilon.li$ bestehen, besteht auch das Axiom $r\varepsilon.I$.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element c, zu welchem man mindestens ein Element e bestimmen kann, das die Eigenschaft $r\varepsilon.li$ hat. Dann bestehen $ec = c$ und $cc_1' = e$, und wir können das folgende Schema bilden.



Aus EA_H folgt $ee = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

25. *Definitionen.*

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Systeme eine Gruppe definieren.

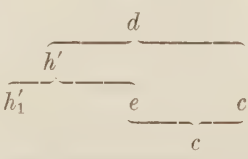
1) $EA_H, lE, U, li(U), rI(U)$
2) $EA_H, lE, U, lv.i, rI(U)$
3) $EA_H, lE, U, r\varepsilon.li, rI(U)$
4) $EA_H, lE, U, r\varepsilon.i, rv.i, li(U)$
5) $EA_H, lE, U, r\varepsilon.li, rv.li$
6) $EA_H, lE, U, lU.i, r\varepsilon.i, rv.i$

Definition 1. *Die Axiome $EA_H, lE, U, li(U)$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 besteht das Axiom E, womit diese Definition auf Definition 12 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 2. *Die Axiome $EA_H, lE, U, lv.i$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element d mit der Eigenschaft $lv.i$. Dann gibt es ein c, zu welchem man genau ein h' bestimmen kann, das $h'c = d$ erfüllt. Nach lE bestehen $ec = c$ und $h'_1 e = h'$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Aus EA_H folgt $h'_1 c = d$. Nach $lv.i$ gilt dann $h'_1 = h'$, woraus $h'e = h'$ folgt. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $ri(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt.

Definition 3. *Die Axiome $EA_H, lE, U, r\varepsilon.li$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 3 besteht auch das Axiom $I(E)$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt.

Definition 4. *Die Axiome EA_H, lE, U, $r\varepsilon.i$, $rv.i$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 2 besteht auch das Axiom E.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 16 im Abschnitt II zurückgeführt.

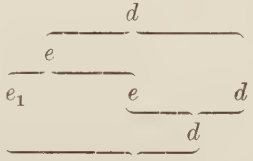
Definition 5. *Die Axiome EA_H, lE, U, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach Hilfssatz 3 besteht auch das Axiom $rU.I$.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 4 im Abschnitt II zurückgeführt.

Definition 6. *Die Axiome EA_H, lE, U, $lU.i$, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn d ein Element mit den Eigenschaften $lU.i$, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ ist, ist es möglich, $ed = d$ und $e_1 e = e$ zu bilden. Dann erhalten wir das folgende Schema.



Aus EA_H folgt $e_1 d = d$, und wegen $lU.i$ gilt $e_1 = e$. Damit ist gezeigt, dass das Element e die Eigenschaft $I(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht E, womit die Definition auf Definition 19 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

26. *Die Irreduzibilität der Definitionen.*

Wir teilen nun eine Tafel mit, die diejenigen Axiomensysteme enthält, die aus den Definitionen des Abschnitts II hervorgehen, wenn die Axiome A und E durch das Axiom EA_H ersetzt werden und das Axiom lE hinzugefügt wird. Aus der Tafel geht hervor, dass alle solche Systeme Gruppendefinitionen sind. Diejenigen Systeme, die genau die in eine Definition eingehenden Axiome enthalten, sind in der Tafel mit fetten Buchstaben bezeichnet.

Wenn die Axiome A und E durch EA_H ersetzt werden und das Axiom rE hinzugefügt wird, erhält man stets ein System, das wegen Definition 3 im Abschnitt II eine Gruppe definiert.

Aus der Tafel geht hervor, dass man die in einer Definition enthaltenen Axiome nicht reduzieren kann, wenn EA_{St} statt EA_H verwendet wird.

Wenn zu einer Definition im Abschnitt III das Axiom U und eines der Axiome lE und rE hinzugefügt und A und E durch EA_H ersetzt werden, erhält man stets eine Definition, die umfassender als die Definitionen dieses Abschnitts ist.

Tafel derjenigen Systeme, die aus den Definitionen des Abschnitts II hervorgehen, wenn die Axiome A und E durch EA_H und lE ersetzt worden sind.

Definition des Abschnitts II	System, das aus dieser Definition hervorgeht	Auf Grund dieser Definition definiert das System eine Gruppe
Def. 1	EA_H, lE, U, lI	II Def. 2
» 5	EA_H, lE, U, $rU.ri$	II Def. 4
» 6	EA_H, lE, U, $lU.i$, $rU.i$	Def. 3
» 7	EA_H, lE, U, $lU.i$, $rE.i$	II Def. 3
» 8	EA_H, lE, U, $rU.i$, $li(U)$	Def. 1
» 9	EA_H, lE, U, $lU.i$, $I(U)$	Def. 3
» 10	EA_H, lE, U, $lU.i$, $ri(U)$	Def. 3
» 11	EA_H, lE, U, $rI(E)$, $rI(U)$	II Def. 4
» 12	**EA_H, lE, U, $li(U)$, $rI(U)$**	**Def. 1**
» 14	**EA_H, lE, U, $l\upsilon.i$, $rI(U)$**	**Def. 2**
» 15	**EA_H, lE, U, $r\varepsilon.li$, $rI(U)$**	**Def. 3**
» 16	**EA_H, lE, U, $r\varepsilon.i$, $r\upsilon.i$, $li(U)$**	**Def. 4**
» 17	EA_H, lE, U, $r\varepsilon.rI$, $rv.rI$	Def. 5
» 18	**EA_H, lE, U, $r\varepsilon.li$, $r\upsilon.li$**	**Def. 5**
» 19	**EA_H, lE, U, $lU.i$, $r\varepsilon.i$, $r\upsilon.i$**	**Def. 6**
» 20	EA_H, lE, U, $rU.li$, $r\varepsilon.li$	Def. 3
» 21	EA_H, lE, U, $rU.li$, $lv.li$	Def. 2

27. ***Definitionen, die EA_{St} statt EA_H enthalten.***

Es ist möglich, in diesem Abschnitt EA_H mit EA_{St} zu ersetzen. Dann können wir dieselben Hilfssätze und Definitionen herleiten, aber die Beweise müssen ein wenig geändert werden.

Im Hilfssatz 1 folgt aus lE $a_1 b = c_1$, und aus dem Schema folgt wegen EA_{St} $c_1 b_1' = a_1$. Wegen U gilt $a_1 = a$, und dann besteht $ab = c_1$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Dem Hilfssatz 2 entspricht Hilfssatz 2 im Abschnitt VII.

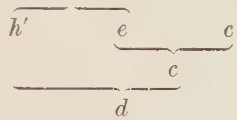
Im Hilfssatz 3 ist es notwendig, das folgende Schema zu betrachten.

$$\overbrace{\underbrace{e \qquad e}_{c} \qquad c}^{c}$$

Wegen lE gilt $e_a c = c$, und aus EA_{St} folgt $ee = e_a$. Dann bilden wir dasselbe Schema wie im Hilfssatz 3. Aus EA_{St} folgt dann $e_a = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Die Definitionen 1, 3–5 bleiben unverändert.

In der Definition 2 bilden wir das Schema



Aus lE, $lv.i$ und EA_{St} folgt $h'e = h'$, und dann verläuft der Beweis wie in der Definition 2.

In der Definition 6 ist es möglich, denselben Beweis wie im Hilfssatz 2 im Abschnitt VII zu benutzen, aber statt $li(U)$ verwenden wir $lU.i$. Dann folgt $ee = e$ und wegen Hilfssatz 1 auch E.

Weil jedes der Axiome EA_H, EA_{St} und EA_L aus zwei symmetrischen Aussagen besteht, ist es möglich, jedes Axiom in zwei symmetrische Axiome zu zerlegen. Als Beispiel wählen wir das rechtsseitige EA_{St}-Axiom, das in folgender Weise formuliert wird.

Wenn zu drei Elementen a, b und c der Menge die Existenz der Produkte v und w bekannt ist, gilt $bc \supset v_h$ und $av_h \supset w_i$, wo v_h ein Element aus v und w_i ein Element aus w ist. Wenn in der Menge ein oder mehrere Elemente $u_1, u_2, \ldots, u_h, \ldots, u_j, \ldots$ existieren, die $u_j c \supset w_i$ erfüllen, gibt es unter diesen Elementen ein u_h, das $ab \supset u_h$ erfüllt.

Solche Axiome werden wir in dieser Arbeit nicht in Betracht ziehen. Wir wollen nur bemerken, dass wenn in diesem Abschnitt EA_{St} statt EA_H verwendet wird, es hinreichend ist, das oben aufgestellte rechtsseitige EA_{St}-Axiom zu benutzen.

ABSCHNITT VII

Definitionen, die das Axiom EA_{St} aber nicht das Axiom U enthalten.

28. *Einleitung.*

In diesem Abschnitt werden wir diejenigen Axiomensysteme betrachten, die das Axiom EA_{St} aber nicht das Axiom U enthalten.

Zuerst werden wir einige Hilfssätze beweisen. Dann werden wir 20 Gruppendefinitionen herleiten. Schliesslich werden wir alle das Axiom EA_{St} enthaltenden Axiomensysteme betrachten, die aus den Definitionen des Abschnitts III hergeleitet werden können.

Es scheint zweckmässig zu sein, die Produkte der in diesem Abschnitt vorkommenden Schemata nicht als mehrdeutig zu bezeichnen. Denn oft ist es nicht möglich, aus den in einen Hilfssatz oder in eine Definition eingehenden Axiomen mehr als ein einziges Element zu bestimmen, das in einem gewissen Produkt enthalten ist. Das Produkt kann auch mehrere Elemente enthalten, aber davon wissen wir nichts.

29. *Hilfssätze.*

Wir werden nun die folgenden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn die Axiome EA_{St}, lE und $rE.i$ bestehen, besteht auch das Axiom E.*

Beweis: Wir nehmen an, dass a und b zwei beliebige Elemente der Menge sind. Wenn d ein Element mit der Eigenschaft $rE.i$ ist, gibt es wegen lE mindestens ein g_1', das $g_1' b \supset d$ erfüllt, und mindestens ein h_1', das $h_1' a \supset g_1'$ erfüllt. Dann können wir das folgende Schema bilden.

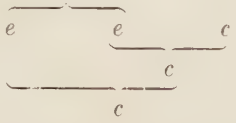
$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{d} & & \\ & \overbrace{\qquad\qquad}^{g_1'} & & & \\ \overbrace{\qquad\qquad}^{h_1'} & & \underbrace{\qquad}_{a} & \underbrace{\qquad}_{b} & \end{array}$$

Wegen $rE.i$ existiert mindestens ein c_1, das $h_1' c_1 \supset d$ und wegen EA_{St} auch $ab \supset c_1$ erfüllt.

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Wenn die Axiome EA_{St}, $li(E)$ und $li(U)$ bestehen, hat ein Element mit der Eigenschaft $li(E)$ auch die Eigenschaft $I(E)$.*

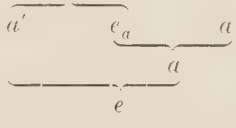
Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein c, zu welchem man genau ein Element e bestimmen kann, das $ec \supset c$ erfüllt. Dann bilden wir



Aus EA_{St}, $ec \supset c$ und $li(U)$ folgt $ee \supset e$, wodurch der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Es wird vorausgesetzt, dass die Axiome EA_{St}, lE und $lU.li$ bestehen. Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lU.li$ und a ein beliebiges Element ist, gelten $e_a a \supset a$ und $a' a \supset e$. Dann besteht auch $a' e_a \supset a'$.*

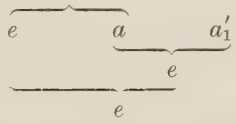
Beweis: Auf Grund der Annahme ist es möglich, das folgende Schema zu bilden.



Weil $a' a \supset e$ gilt, besteht wegen $lU.li$ und EA_{St} $a' e_a \supset a'$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

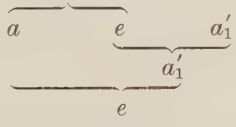
Hilfssatz 4. *Wenn die Axiome EA_{St}, $lU.I$ und $rE.I$ bestehen, bestehen auch die Axiome $lU.e$ und $rE.e$.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lU.I$ und $rE.I$. Wenn a ein beliebiges Element ist, besteht $a a_1' \supset e$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Nach $a a_1' \supset e$, EA_{St} und $lU.I$ gilt $ea \supset a$, womit bewiesen ist, dass das Element e die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Wir bilden auch das Schema



Wegen $a a_1' \supset e$, EA_{St} und $lU.lI$ gilt $ae \supset a$, womit bewiesen ist, dass das Element e auch die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

30. *Definitionen.*

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Systeme eine Gruppe definieren.

1) $EA_{St}, lE, lU.lI, li(U)$
2) $EA_{St}, lE, lU.lI, ri(U)$
3) $EA_{St}, lE, lU.rI, ri(U)$
4) $EA_{St}, lE, lU.li, li(U), I(U)$
5) $EA_{St}, lE, lU, rI(U)$
6) $EA_{St}, lE, lU.ri, ri(U), I(U)$
7) $EA_{St}, lE, lU.li, ri(U), I(U)$
8) $EA_{St}, lE, lU, rE.i$
9) $EA_{St}, lE, rU, rE.i$
10) $EA_{St}, lE, rU.li, li(U)$
11) $EA_{St}, lE, rU.ri, ri(U)$
12) $EA_{St}, lE, lU.ri, rE.ri, ri(U)$
13) $EA_{St}, lE, lU.li, rE.li, li(U)$
14) $EA_{St}, lE, lU, r\varepsilon.i, rv.i$
15) $EA_{St}, lE, lU.li, rE.li, ri(U)$
16) $EA_{St}, lE, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U), I(U)$
17) $EA_{St}, lE, rU, lv.i$
18) $EA_{St}, lE, rU.ri, r\varepsilon.ri, li(U)$
19) $EA_{St}, lE, rU.li, lv.li, ri(U)$
20) $EA_{St}, lE, lU.ri, rE.ri, rv.ri, li(U)$

Definition 1. *Die Axiome $EA_{St}, lE, lU.lI$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lU.lI$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht $a'a \supset e$, und nach Hilfssatz 3 besteht auch $a'e \supset a'$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{\qquad\qquad}^{a'} & & \\ & \overbrace{\qquad\quad}^{e} & & & \\ \overbrace{\qquad\quad}^{a'} & & \underbrace{a} & & \underbrace{a'} \end{array}$$

Wegen EA_{St} und $a'e \supset a'$ gibt es unter den Elementen $e_1, e_2, \ldots$, die möglicherweise das Element e ersetzen können, ein e_k, das $aa' \supset e_k$ erfüllt. Wir bilden auch

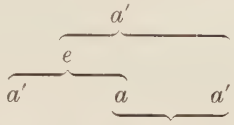
$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{\qquad}^{e_k} & & & \\ \overbrace{\qquad}^{a} & & \underbrace{a'} & & \underbrace{e_k} \\ & & & \underbrace{\qquad}_{a'} & \\ & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{e_k} & & \end{array}$$

Wegen EA_{St}, $ee_k \supset e_k$ und $li(U)$ besteht $aa' \supset e$. Das Element e hat also die Eigenschaft $rE.lI$, und nach Hilfssatz 1 besteht E.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 im Abschnitt III zurückgeführt.

Definition 2. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.lI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lU.lI$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht $a'a \supset e$, und wegen Hilfssatz 3 gilt $a'e \supset a'$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen EA_{St}, $a'e \supset a'$ und $ri(U)$ besteht $aa' \supset e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.lI$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht auch E, womit die Definition auf Definition 2 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 3. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.rI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Nach lE gibt es zu jedem beliebigen Elemente a der Menge mindestens ein Element e_a, das $e_a a \supset a$ erfüllt. Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lU.rI$ ist, gibt es zu jedem a genau ein a', das $a'a \supset e$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 3 besteht dann $a'e_a \supset a'$. Weil das Element e die Eigenschaft $rI(E)$ hat, besteht auch $a'e \supset a'$. Aus $ri(U)$ folgt dann $e_a = e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $lI(E)$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt.

Definition 4. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.li$, $li(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

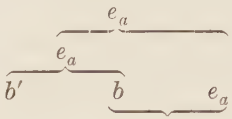
Beweis: Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, gibt es wegen lE und $li(U)$ zu jedem a ein e_a, das $e_a a \supset a$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 2 hat jedes Element e_a die Eigenschaft $I(E)$, und wegen $I(U)$ sind alle e_a gleich. Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $lU.li$ ist, folgt hieraus, dass das Element e gleich jedem e_a ist und die Eigenschaft $lU.lI$ hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 5. *Die Axiome EA_{St}, lE, lU und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

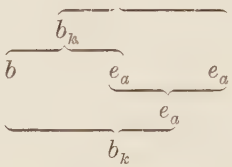
Beweis: Der Annahme zufolge gibt es zu jedem beliebigen Element a genau ein e_a, das $e_a a \supset a$ erfüllt und wegen Hilfssatz 2 die Eigenschaft

$I(E)$ hat. Wenn auch b ein beliebiges Element ist, besteht $b'b \supset e_a$, und wir können das folgende Schema bilden.



Wegen EA_{St} und $b'b \supset e_a$ gibt es mindestens ein b_k, das $b\,e_a \supset b_k$ erfüllt.

Ferner bilden wir



Aus EA_{St} und lU folgt $be_a \supset b$, womit bewiesen ist, dass jedes e_a die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Wegen $rI(U)$ sind alle e_a gleich, und dann gibt es also ein Element e, das die Eigenschaft e hat.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 1 zurückgeführt.

Definition 6. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.ri$, $ri(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lU.ri$, das wegen Hilfssatz 2 auch die Eigenschaft $lU.I$ hat.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht wegen lE $e_a a \supset a$. Wegen lE und $lU.I$ gilt $a'a \supset e$, und wegen Hilfssatz 3 besteht $a'e_a \supset a'$. Daraus folgt, dass jedes e_a die Eigenschaft $ri(E)$ hat. Wegen Hilfssatz 2 hat jedes e_a die Eigenschaft $I(E)$, und nach $I(U)$ sind alle e_a gleich. Folglich hat das Element e die Eigenschaft $lU.lI$, womit diese Definition auf Definition 2 zurückgeführt ist.

Definition 7. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.li$, $ri(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lU.li$, das $ec \supset c$ erfüllt. Nach lE und $lU.li$ gibt es genau ein c', das $c'c \supset e$ erfüllt. Aus Hilfssatz 3 folgt $c'e \supset c'$, womit die Definition auf Definition 6 zurückgeführt ist.

Definition 8. *Die Axiome EA_{St}, lE, lU und $rE.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht auch das Axiom E, womit die Definition auf Definition 8 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 9. *Die Axiome EA_{St}, lE, rU und $rE.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht das Axiom E, womit diese Definition auf Definition 8 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 10. *Die Axiome EA_{St}, lE, $rU.li$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $rU.li$. Wegen Hilfssatz 2 hat es die Eigenschaft $rU.I$, und wegen Hilfssatz 4 hat es auch die Eigenschaft $rU.e$.

Zu einem beliebigen Element a gibt es nach lE mindestens ein Element a_1', das $a_1' a \supset e$ erfüllt. Dann bilden wir

$$\overbrace{\overbrace{a}\ \overbrace{a_1'\ \underbrace{e\ a}}}^{a}$$

Wegen lE, $li(U)$ und EA_{St} besteht $a a_1' \supset e$, wodurch gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.e$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht E, womit diese Definition auf Definition 2 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 11. *Die Axiome EA_{St}, lE, $rU.ri$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 hat ein Element mit der Eigenschaft $rU.ri$ auch die Eigenschaft $rU.I$, und wegen Hilfssatz 4 hat es sogar die Eigenschaft $rU.e$.

Wenn a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht $a_1' a \supset e$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

$$\overbrace{\underbrace{a_1'\ \overbrace{e\ a_1'}}\ \underbrace{a\ a_1'}}$$

Weil $a_1' e \supset a_1'$ besteht, folgt aus EA_{St} und $ri(U)$ $a a_1' \supset e$, womit gezeigt ist, dass das Element e die Eigenschaft $rE.e$ hat. Wegen Hilfssatz 1 besteht dann das Axiom E, womit die Definition auf Definition 1 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 12. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.ri$, $rE.ri$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Weil die Axiome EA_{St}, lE und $rE.ri$ bestehen, besteht wegen Hilfssatz 1 auch das Axiom E.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 10 im Abschnitt III zurückgeführt.

Definition 13. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.li$, $rE.li$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht auch das Axiom E, womit diese Definition auf Definition 12 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 14. *Die Axiome EA_{St}, lE, lU, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge zwei Elemente c und d, zu welchen man genau ein h' bestimmen kann, das $ch' \supset d$ erfüllt.

Wenn es in der Menge zwei Elemente e und e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, wäre es möglich, die folgenden Schemata zu bilden.

Aus EA_{St}, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ folgen $eh' \supset h'$ und $e_a h' \supset h'$, und aus lU folgt dann $e = e_a$. Damit ist gezeigt, dass $rI(U)$ besteht, und hiermit ist diese Definition auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 15. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.li$, $rE.li$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht das Axiom E, womit diese Definition auf Definition 15 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

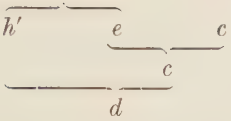
Definition 16. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$, $rv.ri$, $li(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme bestehen $ce \supset c$ und $cc' \supset e$, wo e die Eigenschaften $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $rv.ri$ hat. Aus dem Beweis von Hilfssatz 3 leuchtet ein, dass $ec' \supset c'$ besteht.

Hiermit ist diese Definition auf Definition 4 zurückgeführt.

Definition 17. *Die Axiome EA_{St}, lE, rU und $lv.i$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein d mit der Eigenschaft $lv.i$ und ein c, zu welchen es genau ein h' gibt, das $h'c \supset d$ erfüllt. Nach lE besteht auch $ec \supset c$. Dann ist es möglich, das folgende Schema zu bilden.



Aus EA_{St}, lE und $lv.i$ folgt $h'e \supset h'$, womit diese Definition auf Definition 11 zurückgeführt ist.

Definition 18. *Die Axiome EA_{St}, lE, $rU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $rU.ri$ und $r\varepsilon.ri$. Dann besteht $ce \supset c$, und es gibt genau ein c', das $cc' \supset e$ erfüllt. Aus dem Beweise von Hilfssatz 3 leuchtet ein, dass $ec' \supset c'$ besteht. Dann hat e die Eigenschaft $li(E)$, und hiermit ist diese Definition auf Definition 10 zurückgeführt.

Definition 19. *Die Axiome EA_{St}, lE, $rU.li$, $lv.li$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $rU.li$ und $lv.li$, das $ec \supset c$ und $c'c \supset e$ erfüllt. Wegen Hilfssatz 3 besteht $c'e \supset c'$. Damit ist gezeigt, dass das Element e auch die Eigenschaft $ri(E)$ hat, und hiermit ist diese Definition auf Definition 11 zurückgeführt.

Definition 20. *Die Axiome EA_{St}, lE, $lU.ri$, $rE.ri$, $rv.ri$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht das Axiom E, womit diese Definition auf Definition 16 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

31. *Die Irreduzibilität der Definitionen.*

Wir teilen nun zwei Tafeln mit, die diejenigen Axiomensysteme enthalten, die aus den Definitionen des Abschnitts III hervorgehen, wenn die Axiome A und E durch EA_{St} ersetzt werden und eines der Axiome lE oder rE hinzugefügt wird. Aus den Tafeln geht hervor, dass alle solche Systeme ausser einem Gruppendefinitionen sind. Diejenigen Systeme, die genau die in eine Definition eingehenden Axiome enthalten, sind in der Tafel mit fetten Buchstaben bezeichnet. Die anderen Systeme enthalten auch entbehrliche Axiome.

Hiermit ist das Problem der Irreduzibilität der in diesem Abschnitt aufgestellten Definitionen auf das Problem der Irreduzibilität der Definitionen des Abschnitts III zurückgeführt.

Tafel derjenigen Axiomensysteme, die aus den Definitionen des Abschnitts III hervorgehen, wenn die Axiome A und E durch EA_{St} und lE ersetzt worden sind.

Definition des Abschnitts III	System, das aus dieser Definition hervorgeht	Auf Grund dieser Definition definiert das System eine Gruppe
Def. 1	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.ll, li(U)}$	**Def. 1**
» 2	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.ll, ri(U)}$	**Def. 2**
» 3	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.rI, \gamma i(U)}$	**Def. 3**
» 4	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.li, li(U), I(U)}$	**Def. 4**
» 5	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU, rI(U)}$	**Def. 5**
» 6	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.ri, ri(U), I(U)}$	**Def. 6**
» 7	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.li, ri(U), I(U)}$	**Def. 7**
» 8	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lE, lU, rE.i}$	**Def. 8**
» 9	$EA_{St}, lE, lU.i, rU$	Def. 15
» 10	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rU.li, li(U)}$	**Def. 10**
» 11	$EA_{St}, lE, rU, li(U)$	Def. 10
» 12	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rU.ri, ri(U)}$	**Def. 11**
» 13	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU, r\varepsilon.i, r\upsilon.i}$	**Def. 14**
» 14	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.ri, r\varepsilon.ri, r\upsilon.ri, li(U), I(U)}$	**Def. 16**
» 15	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rU, l\upsilon.i}$	**Def. 17**
» 16	$EA_{St}, lE, rU, r\varepsilon.li$	—
» 17	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rU.ri, r\varepsilon.ri, li(U)}$	**Def. 18**
» 18	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rU.li, l\upsilon.li, ri(U)}$	**Def. 19**

Tafel derjenigen Axiomensysteme, die aus den Definitionen des Abschnitts III hervorgehen, wenn die Axiome A und E durch EA_{St} und rE ersetzt worden sind. In der Tafel sind die rechtsseitigen und die linksseitigen Axiome miteinander vertauscht.

Definition des Abschnitts III	System, das aus dieser Definition hervorgeht	Auf Grund dieser Definition definiert das System eine Gruppe
Def. 1	$EA_{St}, lE, rE.rI, rU.rI, ri(U)$	Def. 11
» 2	$EA_{St}, lE, rE.rI, rU.rI, li(U)$	Def. 10
» 3	$EA_{St}, lE, rE.ll, rU.ll, li(U)$	Def. 10
» 4	$EA_{St}, lE, rE.ri, rU.ri, ri(U), I(U)$	Def. 11
» 5	$EA_{St}, lE, rE.i, rU, lI(U)$	Def. 9
» 6	$EA_{St}, lE, rE.li, rU.li, li(U), I(U)$	Def. 10
» 7	$EA_{St}, lE, rE.ri, rU.ri, li(U), I(U)$	Def. 19
» 8	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, rE.i, rU}$	**Def. 9**
» 9	$EA_{St}, lE, lU, rE.i, rU.i$	Def. 5
» 10	$\boldsymbol{EA_{St}, lE, lU.ri, rE.ri, ri(U)}$	**Def. 12**

Definition des Abschnitts III	System, das aus dieser Definition hervorgeht	Auf grund dieser Definition definiert das System eine Gruppe
» 11	EA_{St}, lE, lU, $rE.i$, $ri(U)$	Def. 8
» 12	**EA_{St}, lE, $lU.li$, $rE.li$, $li(U)$**	**Def. 13**
» 13	EA_{St}, lE, $rE.i$, rU, $lv.i$	Def. 9
» 14	EA_{St}, lE, $rE.li$, $rU.li$, $lv.li$, $ri(U)$, $I(U)$	Def. 20
» 15	EA_{St}, lE, lU, rE, $rv.i$	Def. 8
» 16	EA_{St}, lE, lU, rE	Def. 8
» 17	**EA_{St}, lE, $lU.li$, $rE.li$, $ri(U)$**	**Def. 15**
» 18	**EA_{St}, lE, $lU.ri$, $rE.ri$, $rv.ri$, $li(U)$**	**Def. 20**

Wenn wir Definition 16 im Abschnitt III betrachten, die aus den Axiomen A, E, lE, rU und $re.li$ besteht, sehen wir sofort ein, dass der Beweis dieser Definition darauf beruht, dass wir wegen E ein Element $x = e_k$ bestimmen können, das $ex \supset e$ erfüllt. Wenn A und E durch EA_{St} ersetzt worden sind, ist es aber wegen des entsprechenden Schemas nicht möglich, ein solches e_k zu bestimmen.

ABSCHNITT VIII

Definitionen, die das Axiom EA_L enthalten.

32. *Einleitung.*

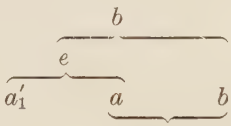
Im achten Abschnitt dieser Arbeit wollen wir diejenigen Definitionen herleiten, die das Axiom EA_L enthalten. Zuerst wollen wir 5 Hilfssätze beweisen. Dann stellen wir die Definitionen auf. Schliesslich werden wir die Irreduzibilität der in diesem Abschnitt aufgestellten Definitionen auf die Irreduzibilität der Definitionen der Abschnitte II und III zurückführen.

33. *Hilfssätze.*

Wir werden nun die folgenden Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn die Axiome EA_L und $lE.lI$ bestehen, besteht das Axiom E.*[1]

Beweis: Wenn a und b zwei beliebige Elemente sind, besteht wegen $lE.lI$ $a_1' a \supset e$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen EA_L besteht $ab \supset c_1$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

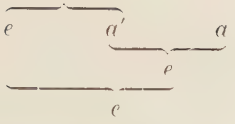
Hilfssatz 2. *Wenn die Axiome EA_L, $lE.I$ und $rU.I$ bestehen, besteht das Axiom E.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 im Abschnitt VII besteht das Axiom $lE.lI$, und wegen Hilfssatz 1 besteht dann E, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

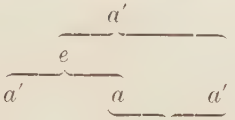
Hilfssatz 3. *Wenn die Axiome EA_L, $lE.I$ und $lU.I$ bestehen und e ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, bestehen $a' a \supset e$, $e a' \supset a'$, $a a' \supset e_k$ und $a' e_k \supset a'$. Wenn auch das Axiom U besteht, gilt $e_k e_k = e_k$.*

Beweis: Wenn e ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $lU.I$ und a ein beliebiges Element der Menge ist, besteht $a' a \supset c$. Dann können wir das folgende Schema bilden.

[1] Lorenzen, S. 323.

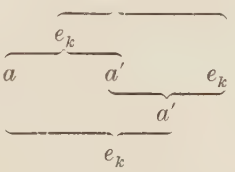


Wegen EA_L und $lU.I$ besteht $ea' \supset a'$. Wir bilden auch



Wegen EA_L bestehen $aa' \supset e_k$ und $a'e_k \supset a'$.

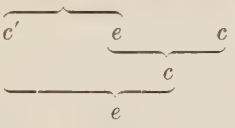
Wenn U besteht, können wir das folgende Schema bilden.



Wegen EA_L gilt $e_k e_k = e_k$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Wenn die Axiome EA_L, $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ bestehen, besteht das Axiom $ri(E)$.*

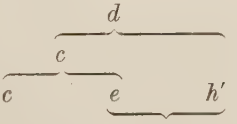
Beweis: Der Annahme zufolge bestehen $ec \supset c$ und $c'c \supset e$, wo e ein Element mit den Eigenschaften $l\varepsilon.li$ und $lv.li$ ist. Dann bilden wir



Wegen EA_L und $lv.li$ gilt $c'e \supset c'$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 5. *Wenn die Axiome EA_L, lU, $r\varepsilon.i$ und $rv.i$ bestehen, besteht das Axiom $rI(U)$.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es zu zwei Elementen d und c genau ein h', das $ch' \supset d$ erfüllt. Wenn e ein Element mit der Eigenschaft $rI(E)$ ist, können wir das folgende Schema bilden.



Wegen EA_L und $rv.i$ gilt $eh' \supset h'$. Wenn es in der Menge ein anderes

Element e_a mit der Eigenschaft $rI(E)$ gäbe, wäre es möglich, $e_a h' \supset h'$ herzuleiten. Aus lU folgt dann $e_a = e$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

34. *Definitionen.*

Wir werden nun beweisen, dass die folgenden Systeme eine Gruppe definieren.

1) $EA_L, U, lE.lI$
2) $EA_L, lE.lI, lU.lI, li(U)$
3) $EA_L, lE.lI, lU.lI, ri(U)$
4) $EA_L, lE.rI, lU.rI, ri(U)$
5) $EA_L, U, lE.ri, rU.ri$
6) $EA_L, lE.ri, rU.ri, ri(U)$
7) $EA_L, lE.li, rU.li, li(U)$
8) $EA_L, U, lE.li, lU.li, I(U)$
9) $EA_L, U, lE.li, lU.li, ri(U)$
10) $EA_L, lE.li, lU.li, li(U), I(U)$
11) $EA_L, lE.li, lU.li, ri(U), I(U)$
12) $EA_L, U, lE.ri, lU.ri, I(U)$
13) $EA_L, U, lE.ri, lU.ri, ri(U)$
14) $EA_L, lE.ri, lU.ri, ri(U), I(U)$
15) $EA_L, lE.ri, lU.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri, li(U), I(U)$
16) $EA_L, lU, lE.li, rI(U)$
17) $EA_L, U, lE.rI, rI(U)$
18) $EA_L, U, lE.rI, r\varepsilon.rI, rv.rI$
19) $EA_L, lU, lE.li, r\varepsilon.li, rv.li$
20) $EA_L, lE, rU, r\varepsilon.li$
21) $EA_L, lE.ri, rU.ri, r\varepsilon.ri, li(U)$
22) $EA_L, U, lE.li, rU.li, r\varepsilon.li$
23) $EA_L, lE.li, rU.li, lv.li, ri(U)$
24) $EA_L, U, lE.li, rU.li, lv.li$

Definition 1 wurde zum erstenmal von Lorenzen[1] hergeleitet. Er leitet auch zwei andere Definitionen her. Die erste von ihnen umfasst die Axiome EA_L, lU und $lE.lI$ und ist umfassender als Definition 2. Die zweite umfasst EA_L, lU und $rE.li$ und ist umfassender als Definition 6.

Definition 1. *Die Axiome EA_L, U und $lE.lI$ definieren eine Gruppe.*

Definition 2. *Die Axiome EA_L, $lE.lI$, $lU.lI$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

[1] S. 326.

Definition 3. *Die Axiome EA_L, $lE.lI$, $lU.lI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 1 besteht das Axiom E, womit diese Definitionen auf Definition 1 im Abschnitt II bzw. Definition 1 und 2 im Abschnitt III zurückgeführt sind.

Definition 4. *Die Axiome EA_L, $lE.rI$, $lU.rI$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es in der Menge ein Element e mit den Eigenschaften $lE.rI$ und $lU.rI$. Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen Hilfssatz 3 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $a'e_k \supset a'$. Nach $rI(E)$ gilt auch $a'e \supset a'$. Aus $ri(U)$ folgt $e_k = e$. Dann hat e die Eigenschaft $rE.rI$. Wegen Hilfssatz 1 besteht das Axiom E, womit die Definition auf Definition 3 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 5. *Die Axiome EA_L, U, $lE.ri$ und $rU.ri$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 im Abschnitt VI hat ein Element mit der Eigenschaft $lE.ri$ auch die Eigenschaft $lE.I$, und wegen Hilfssatz 2 besteht dann E, womit die Definition auf Definition 5 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

Definition 6. *Die Axiome EA_L, $lE.ri$, $rU.ri$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $rU.ri$ auch die Eigenschaft $I(E)$, und wegen Hilfssatz 2 besteht E. Hiermit ist diese Definition auf Definition 12 im Abschnitt III zurückgeführt.

Definition 7. *Die Axiome EA_L, $lE.li$, $rU.li$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

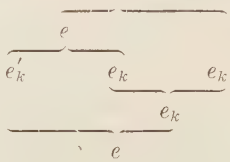
Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.li$ und $rU.li$ auch die Eigenschaft $I(E)$. Wegen Hilfssatz 2 besteht dann E, womit diese Definition auf Definition 10 im Abschnitt III zurückgeführt ist.

Definition 8. *Die Axiome EA_L, U, $lE.li$, $lU.li$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Definition 9. *Die Axiome EA_L, U, $lE.li$, $lU.li$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 dieses Abschnitts und wegen Hilfssatz 3 im

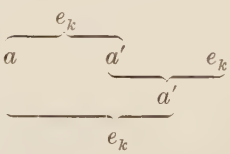
Abschnitt VI hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.li$ und $lU.li$ auch die Eigenschaft $I(E)$. Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen Hilfssatz 3 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $e_k e_k \supset e_k$. Wenn $I(U)$ besteht, folgt nun $e_k = e$, womit Definition 8 auf Definition 5 zurückgeführt ist. Wegen $lE.I$ und $lU.I$ gilt $e_k' e_k = e$, und wir erhalten



Aus EA_L folgt $e e_k = e$, woraus nach $ri(U)$ $e_k = e$ folgt. Hiermit ist auch Definition 9 auf Definition 5 zurückgeführt.

Definition 10. *Die Axiome EA_L, $lE.li$, $lU.li$, $li(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge gibt es ein Element e mit den Eigenschaften $lE.li$ und $lU.li$, das wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII auch die Eigenschaft $I(E)$ hat. Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen Hilfssatz 3 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $a' e_k \supset a'$. Dann können wir das folgende Schema bilden.



Wegen EA_L bestehen $aa' \supset e_h$ und $e_h e_k \supset e_k$, und aus Hilfssatz 2 im Abschnitt VII folgt $e_h e_h \supset e_h$. Nach $I(U)$ gilt dann $e_h = e$. Damit ist gezeigt, dass e die Eigenschaft $rE.I$ hat, und hiermit ist diese Definition auf Definition 6 zurückgeführt.

Definition 11. *Die Axiome EA_L, $lE.li$, $lU.li$, $ri(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es ein Element e mit den Eigenschaften $lE.li$ und $lU.li$. Wegen Hilfssatz 4 hat e die Eigenschaft $ri(E)$, und wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat es auch die Eigenschaft $I(E)$. Wenn a ein beliebiges Element ist, bestehen wegen Hilfssatz 3 $a'a \supset e$, $aa' \supset e_k$ und $a' e_k \supset a'$. Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat e_k die Eigenschaft $I(E)$. Aus $I(U)$ folgt $e_k = e$. Dann hat e die Eigenschaften $lE.I$, $lU.I$ und $rE.I$, und hiermit ist die Definition auf Definition 7 zurückgeführt.

Definition 12. *Die Axiome EA_L, U, $lE.ri$, $lU.ri$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 im Abschnitt VI hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $lU.ri$ auch die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 8 zurückgeführt ist.

Definition 13. *Die Axiome EA_L, U, $lE.ri$, $lU.ri$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $lU.ri$ auch die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 9 zurückgeführt ist.

Definition 14. *Die Axiome EA_L, $lE.ri$, $lU.ri$, $ri(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $lU.ri$ auch die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 11 zurückgeführt ist.

Definition 15. *Die Axiome EA_L, $lE.ri$, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$, $rv.ri$, $li(U)$ und $I(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 hat ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$, $lU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $rv.ri$ auch die Eigenschaft $li(E)$, womit die Definition auf Definition 10 zurückgeführt ist.

Definition 16. *Die Axiome EA_L, lU, $lE.li$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lE.li$. Wegen Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat es auch die Eigenschaft $lE.I$. Nach Hilfssatz 3 bestehen $a'a \supset e$ und $aa' \supset e_k$. Wir bilden nun das folgende Schema.

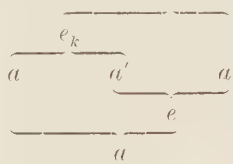
$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{e} & & \\ & \overbrace{\qquad\qquad}^{e} & & & \\ \overbrace{\qquad\qquad}^{a'} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{a} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{e} \end{array}$$

Aus EA_L folgt $ae \supset a_k$. Ferner erhalten wir

$$\begin{array}{ccccc} & & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{} & & \\ & \overbrace{\qquad\qquad}^{a_k} & & & \\ \overbrace{\qquad\qquad}^{a} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{e} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{e} \\ & & & \overbrace{\qquad\qquad}^{e} & \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{a_k} & & & & \end{array}$$

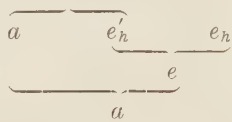
Aus EA_L folgt $a_h e \supset a_k$, und $ae \supset a_h$, und wegen lU gilt $a_h = a$, woraus $ae \supset a$ folgt. Das Element e hat also die Eigenschaft $rI(E)$.

Ferner bilden wir das Schema

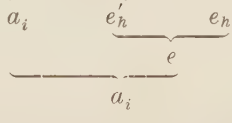


Wegen EA_L bestehen $e_h a \supset a$ und $aa' \supset e_h$. Nach Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat e_h die Eigenschaft $I(E)$.

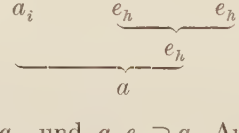
Wegen $lE.rI$ gilt $e'_h e_h \supset e$, und wir bilden



Wegen EA_L gilt $ae'_h \supset a_i$ und $a_i e_h \supset a$. Ferner bilden wir



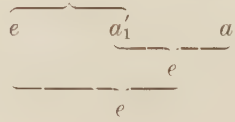
Aus EA_L folgt $a_i e'_h \supset a_j$ und $a_j e_h \supset a_i$. Wir bilden ebenfalls



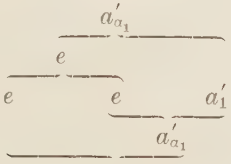
Wegen EA_L gilt $a_i e_h \supset a_n$ und $a_n e_h \supset a$. Aus lU folgt $a_n = a_i$. Dann gilt $a_i e_h \supset a_i$. Aus lU folgt ferner $a_j = a_i$, woraus $a_i e'_h \supset a_i$. Aus lU folgt $a_i = a$, und dann gilt $a e_h \supset a$. Das Element e_h hat also die Eigenschaft $rI(E)$. Wegen $rI(U)$ gilt $e_h = e$, woraus $aa' \supset e$ folgt. Hiermit ist diese Definition auf Definition 6 zurückgeführt.

Definition 17. *Die Axiome EA_L, U, $lE.rI$ und $rI(U)$ definieren eine Gruppe.*

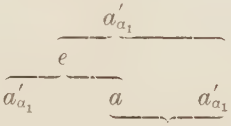
Beweis: Auf Grund der Annahme gibt es in der Menge ein Element e mit der Eigenschaft $lE.rI$. Wenn a ein beliebiges Element ist, gilt $a'_1 a \quad e$. Wir bilden nun



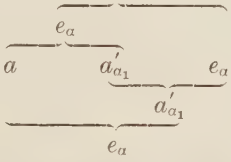
Aus EA_L folgt $ea'_1 = a'_{a_1}$. Ferner bilden wir



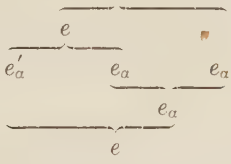
woraus nach EA_L $ea'_{a_1} = a'_{a_1}$ folgt, und



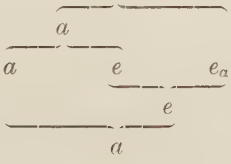
woraus nach EA_L $aa'_{a_1} = e_a$ und $a'_{a_1}e_a = a'_{a_1}$. Wir erhalten auch



Wegen EA_L gilt $e_a e_a = e_a$. Nach $lE.rI$ besteht $e'_a e_a \quad e$. Dann bilden wir



woraus nach EA_L $ee_a = e$ folgt, und



Aus EA_L folgt $ae_a = a$, womit gezeigt ist, dass e_a die Eigenschaft $rI(E)$ hat. Nach $rI(U)$ gilt $e_a = e$, und e hat also die Eigenschaft $rE.rI$. Wegen Hilfssatz 1 besteht E, womit diese Definition auf Definition 1 im Abschnitt II zurückgeführt ist.

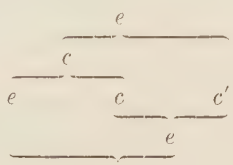
Definition 18. *Die Axiome EA_L, U, $lE.rI$, $r\varepsilon.rI$ und $rv.rI$ definieren eine Gruppe.*

Definition 19. *Die Axiome EA_L, lU, $lE.li$, $r\varepsilon.li$ und $rv.li$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 5 besteht $rI(U)$, womit die Definitionen auf Definition 17 bzw. 16 zurückgeführt sind.

Definition 20. *Die Axiome EA_L, lE, rU und $r\varepsilon.li$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Der Annahme zufolge bestehen $ec \supset c$ und $cc' \supset e$, und wir können das folgende Schema bilden.



Wegen EA_L bestehen $cc' \supset e_k$ und $ee_k \supset e$. Nach Hilfssatz 2 im Abschnitt VII hat e_k die Eigenschaft $I(E)$, womit die Definition auf Definition 6 zurückgeführt ist.

Definition 21. *Die Axiome EA_L, $lE.ri$, $rU.ri$, $r\varepsilon.ri$ und $li(U)$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 gibt es in der Menge ein Element mit den Eigenschaften $lE.li$ und $rU.li$, womit die Definition auf Definition 7 zurückgeführt ist.

Definition 22. *Die Axiome EA_L, U, $lE.li$, $rU.li$ und $r\varepsilon.li$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 3 im Abschnitt VI gibt es in der Menge ein Element mit den Eigenschaften $lE.I$ und $rU.I$, womit die Definition auf Definition 5 zurückgeführt ist.

Definition 23. *Die Axiome EA_L, $lE.li$, $rU.li$, $lv.li$ und $ri(U)$ definieren eine Gruppe.*

Definition 24. *Die Axiome EA_L, U, $lE.li$, $rU.li$ und $lv.li$ definieren eine Gruppe.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 4 gibt es in der Menge ein Element mit den Eigenschaften $lE.ri$ und $rU.ri$, womit Definition 23 auf Definition 6 und Definition 24 auf Definition 5 zurückgeführt ist.

35. ***Die Irreduzibilität der Definitionen.***

Wir werden nun die Irreduzibilität der in diesem Abschnitt hergeleiteten Definitionen auf die Irreduzibilität der Definitionen der Abschnitte II und III zurückführen.

Zuerst wollen wir die Definitionen des Abschnitts II betrachten. Wenn wir in einer Definition, die die Axiome A, E und lE enthält, die Axiome A und E durch EA_H oder EA_{St} ersetzen, erhalten wir stets eine Definition, was im Abschnitt VI gezeigt ist. Wenn wir in einer solchen Definition A und E durch EA_L ersetzen, erhalten wir eine Definition, die umfassender als eine der Definitionen des Abschnitts VI ist, denn EA_L ist ja umfassender als EA_H oder EA_{St}.

Wir betrachten nun diejenigen Definitionen des Abschnitts II, die die Axiome A und E aber nicht lE und i enthalten. Wenn wir A und E durch EA_L ersetzen, erhalten wir stets eine Definition, die einer Definition dieses Abschnitts entspricht. Es ist ja leicht einzusehen, dass die Definitionen 1, 5, 17, 18, 22 und 24 dieses Abschnitts aus den Definitionen 1, 5, 11, 17, 20 und 21 des Abschnitts II hervorgehen, wenn A und E durch EA_L ersetzt werden.

In den Definitionen 6–10 des Abschnitts II, die die Axiome A, E und i aber nicht lE enthalten, ist es notwendig, wenn wir A und E durch EA_L ersetzen, auch i durch $li(E)$ oder $ri(E)$ zu ersetzen, wenn die erhaltenen Systeme eine Gruppe sollen definieren können. Denn sonst erhalten wir wegen Satz 1 im Abschnitt VI ein System, das keine Gruppendefinition ist.

Wenn wir in den Definitionen 6–10 des Abschnitts II die Axiome A und E durch EA_L und i durch $li(E)$ ersetzen, erhalten wir fünf Systeme, die eine Gruppe definieren. Die drei ersten Systeme sind umfassender als die Definitionen 24, 5 und 7 dieses Abschnitts. Aus den zwei letzteren gehen die Definitionen 8 und 9 dieses Abschnitts hervor. Wenn wir A und E durch EA_L und i durch $ri(E)$ ersetzen, erhalten wir auch fünf Systeme, die eine Gruppe definieren. Die drei ersten Systeme sind mehr umfassend als die Definitionen 5, 22 und 5 dieses Abschnitts, die zwei letzteren sind mit den Definitionen 12 und 13 dieses Abschnitts identisch.

Wir wollen auch die Definitionen des Abschnitts III betrachten. Im Abschnitt VII ist gezeigt, dass es möglich ist, in der Definition 15 die Axiome A und E durch EA_{St} zu ersetzen. Wenn in den übrigen Axiomen, die A und E aber nicht i enthalten, A und E durch EA_L ersetzt werden, erhalten wir Systeme, die Definitionen dieses Abschnitts entsprechen. Es ist nicht schwer zu bestätigen, dass die Definitionen 2–4, 6,

7, 10, 11, 14, 15, 20, 21 und 23 dieses Abschnitts aus den Definitionen 1–3, 12, 10, 4, 7, 6, 14, 16–18 des Abschnitts III hervorgehen, wenn A und E durch EA_L ersetzt werden.

Wenn wir in den Definitionen 5 und 13 des Abschnitts III die Axiome A und E durch EA_L und i durch $li(E)$ ersetzen, erhalten wir die Definitionen 16 und 19 dieses Abschnitts. Wenn wir in den Definitionen 8, 9 und 11 des Abschnitts III dieselben Axiome austauschen, erhalten wir Systeme, die umfassender sind als die Definitionen 6, 23 und 7 dieses Abschnitts. Wenn wir in den Definitionen 9 und 11 des Abschnitts III die Axiome A und E durch EA_L und i durch $ri(E)$ ersetzen, erhalten wir Systeme, die umfassender sind als Definition 6 dieses Abschnitts. Wenn wir in den Definitionen 5, 8 und 13 des Abschnitts III dieselben Axiome austauschen, erhalten wir drei Systeme, die unentschiedene Systeme sind, nämlich

$$EA_L, lU, lE.ri, rI(U)$$
$$EA_L, lU, lE.ri, rE.ri$$
$$EA_L, lU, lE.ri, r\varepsilon.ri, rv.ri.$$

Hiermit ist gezeigt, dass es möglich ist, die Irreduzibilität der in diesem Abschnitt hergeleiteten Definitionen auf die Irreduzibilität der Axiome der Abschnitte II und III zurückzuführen.

LITERATURVERZEICHNIS

R. Baer–F. Levi, Vollständige irreduzible Systeme von Gruppenaxiomen. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 2. Abhandlung 1932, S. 3–12.

L. E. Dickson, Definitions of a group and a field by independent postulates. Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), S. 198–204.

R. Garver, A definition of group by means of three postulates. Amer. J. Math. **57** (1935), S. 276–280.

E. V. Huntington, Two definitions of an Abelian group by sets of independent postulates. Trans. Amer. Math. Soc. **4** (1903), S. 27–30.

——, Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), S. 181–197.

P. Lorenzen, Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. **49** (1943–44), S. 313–327.

T. Nagell, Lärobok i algebra. Uppsala 1949.

A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin 1923.